مبادرة

عاوزين نتعلم

المراجعة النهائية

في

الرياضيات

إعداد

الأستاذ / أحمد السعيد عبد المنعم

الأستاذ / جورج عازر جورج

أولاً

تمارين على طرق العد

حاول أن تحل

(١) اختير ٣ أشخاص معًا من مجموعة مكونة من ٥ رجال ، ٤ نساء أوجد: كم طريقة يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة فى كل من الحالات الآتية:

(أ) إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس؟

(ب) إذا كان الأشخاص الثلاثة فيهم اثنان فقط من نفس الجنس؟

الحل

(أ) الثلاثة إما من الرجال أو من النساء

عدد الطرق = $^{5}ق_{3} + {^{4}ق_{3}} = 14$

(ب) إما رجلان وامرأة أو رجل وامرأتان

عدد الطرق = $^{5}ق_{2} \times {^{4}ق_{1}} + {^{5}ق_{1}} \times {^{4}ق_{2}} = 10\times4 + 5\times6 = 70$

حاول أن تحل

(٢) يدرس الطالب فى السنة الأولى بإحدى الكليات الجامعية ٨ مواد دراسية، ولا يحق له الانتقال إلى السنة الثانية إلا إذا نجح فى ٦ منها على الأقل، فكم طريقة يمكن بها للطالب أن ينتقل للسنة الثانية؟

الحل

عدد الطرق هو عدد طرق اختيار ٦ من ٨ أو ٧ من ٨ أو ٨ من ٨

∴ عدد الطرق = $^{8}ق_{6} + {^{8}ق_{7}} + {^{8}ق_{8}} = 28 + 8 + 1 = 37$

مثال

(٣) حقيبة بها ١٢ كرة حمراء ، ٨ كرات بيضاء ، أوجد عدد طرق سحب ٣ كرات حمراء و ٢ كرة بيضاء فى كل من الحالات الآتية:

(أ) إذا كان السحب مع الاحلال (التكرار) والترتيب.

(ب) إذا كان السحب بدون إحلال مع الترتيب.

(جـ) إذا كان السحب بدون إحلال ودون ترتيب.

الحل

(أ) عدد الطرق = $(12)^{3} \times 8^{2}$

(ب) عدد الطرق = $^{12}ل_{3} \times {^{8}ل_{2}}$

(جـ) عدد الطرق = $^{12}ق_{3} \times {^{8}ق_{2}}$

حاول أن تحل

(٣) في المثال السابق أوجد عدد طرق سحب ٥ كرات من نفس اللون في كل من الحالات السابقة.

الحل

(أ) عدد الطرق = $(١٢)^٥ + (٨)^٥$ =

(ب) عدد الطرق = $^{١٢}ل_٥ + ^{٨}ل_٥$ =

(جـ) عدد الطرق = $^{١٢}ق_٥ + ^{٨}ق_٥$ =

تفكير ناقد: أوجد عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة في ساحة انتظار بها ١٠ أماكن وقوف.

(أ) إذا كان الموقف على شكل دائرة.

(ب) إذا كان الموقف على شكل صف.

الحل

(أ) عدد الطرق = (عدد الأماكن) ل (عدد السيارات) = $^{١٠}ل_٤$

(ب) عدد الطرق = (عدد الأماكن − عدد السيارات + ١) ل (عدد السيارات)

= $^{(١٠-٤+١)}ل_٤$ = $^{٧}ل_٤$

(٤) إذا كانت س = {٢، ٣، ٤، ٥} وبفرض عدم السماح بتكرار الرقم أوجد عدد كل من الأعداد الآتية المكونة من عناصر س

(أ) إذا كان العدد مكونا من ٣ أرقام بالضبط

(ب) إذا كان العدد مكونا من ٣ أرقام على الأقل

(جـ) إذا كان العدد مكونا من ٣ أرقام على الأكثر

الحل

(أ) عدد الأعداد = عدد طرق اختيار ٣ من ٤ مع الترتيب دون تكرار

= $^{٤}ل_٣$ =

٢	٣	٤
مئات	عشرات	آحاد

(ب) عدد الأعداد = عدد طرق اختيار ٣ أو ٤ من ٤ بنفس الأسلوب

= $^{٤}ل_٣ + ^{٤}ل_٤$ =

(جـ) عدد الأعداد = $^{٤}ل_١ + ^{٤}ل_٢ + ^{٤}ل_٣$ =

الكتاب المدرسي صـ ١٢

(٣١) لدينا ٤ نقاط في مستوى واحد، وليست على استقامة واحدة ، أوجد عدد القطع المستقيمة التى تصل كل منها بين نقطتين؟

(٣٢) كم طريقة يمكن بها اختيار ثلاثة أشخاص من بين خمسة أشخاص؟

(٣٣) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنة للطلبة بها أعضاء من بين ٢٠ طالبًا وعشر طالبات، بحيث تتكون اللجنة من ٤ طلاب وطالبتين؟

(٣٤) كم طريقة يمكن بها تكوين فريق من سبعة أعضاء من بين تسع بنات وخمسة أولاد، بحيث يحتوى الفريق على ثلاثة أولاد فقط؟

(٣٥) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لايدخل شخص في اللجنتين في ذات الوقت؟

(٣٦) أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه:

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦

(٣٧) أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه:

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٢

(٣٨) يُراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال ، ٣ نساء:

(أ) أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة.

(ب) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة فقط؟

(ج) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة على الأقل؟

(٣١) عدد القطع المستقيمة = عدد طرق اختيار ٢ من ٤ دون تكرار ودون ترتيب $= {}^{4}C_{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

(٣٢) الاختيار بدون تكرار ودون ترتيب ∴ عدد الطرق $= {}^{5}C_{3} = {}^{5}C_{2} = 10$

(٣٣) عدد طرق اختيار الطلبة $= {}^{20}C_{4}$ ، عدد طرق اختيار الطالبات $= {}^{10}C_{2}$

∴ عدد طرق اختيار اللجنة $= {}^{20}C_{4} \times {}^{10}C_{2} = 4845 \times 45 = 218025$

(٣٤) عدد طرق اختيار الأولاد $= {}^{5}C_{3}$ ، عدد طرق اختيار البنات $= {}^{9}C_{4}$

∴ عدد طرق اختيار الفريق $= {}^{5}C_{3} \times {}^{9}C_{4} = 10 \times 126 = 1260$

(٣٥) عدد طرق اختيار اللجنتين معًا = عدد طرق اختيار الأولى × الثانية $= {}^{12}C_{3} \times {}^{9}C_{3} = 18480$

(٣٦) (أ) عدد المثلثات $= {}^{4}C_{3} = 4$ (ب) ${}^{5}C_{3} = {}^{5}C_{2} = 10$ (ج) ${}^{6}C_{3} = 20$

(٣٧) عدد أقطار الشكل = عدد القطع المستقيمة − عدد الأضلاع $= {}^{n}C_{2} - n$

(أ) ${}^{6}C_{2} - 6 = 9$ (ب) ${}^{8}C_{2} - 8 = 28 - 8 = 20$ (ج) ${}^{12}C_{2} - 12 = 54$

(٣٨) (أ) عدد الطرق المختلفة = عدد طرق اختيار ٤ من ١٢ $= {}^{12}C_{4} = 495$

(ب) عدد الطرق $= {}^{3}C_{1} \times {}^{9}C_{3} = 252$ ⓐ العدد الكلي − الرجال $= {}^{12}C_{4} - {}^{9}C_{4}$

(ج) امرأة واحدة على الأقل تعني واحدة أو اثنين أو ثلاثة $= {}^{3}C_{1} \times {}^{9}C_{3} + {}^{3}C_{2} \times {}^{9}C_{2} + {}^{3}C_{3} \times {}^{9}C_{1}$

$= 369$

ثانياً: التباديل والتوافيق

حاول أن تحل

(١) إذا كان $ن-٤ ل ٩ = ن-٤ ل ٩$ فأوجد قيمة ن

الحل: $ن - ٤ \geq ٩$ ∴ $ن \geq ١٣$ ∴ $ن \in \{١٣، ١٤، ......\}$

(٢) حاول أن تحل: إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠$ أوجد قيم كل من ن، ر المحتملة

الحل:

ر	١	٣	٢
ن	٢١٠	٧	١٥

حيث إن $٢١٠ = {}^{٢١٠}ل_{١} = {}^{١٥}ل_{٢} = {}^{٧}ل_{٣}$

(٣) أوجد قيمة ن في كل مما يأتي

(i) $^{ن+١}ق_{ن-١} = ٦٦$ (ii) $^{٢٥}ق_{٢ن-١٤} = {}^{٢٥}ق_{ن-١}$

الحل: (i) $^{ن+١}ق_{٢} = ٦٦$ ∴ $\frac{^{ن+١}ل_{٢}}{٢} = ٦٦$ ∴ $^{ن+١}ل_{٢} = ١٣٢$

∴ $ن + ١ = ١٢$ ∴ $ن = ١١$

(ii) إما $٢ن - ١٤ = ن - ١$ ∴ $ن = ١٣$

أو $٢ن - ١٤ + ن - ١ = ٢٥$ ومنها $٣ن = ٤٠$ ∴ $ن = \frac{٤٠}{٣}$ مرفوض

(٤) إذا كان $^{١٢}ق_{ر} : {}^{١٢}ق_{ر+١} = ٥ : ٩$، $^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$

أوجد كلاً من ن، ر

الحل: $\frac{^{١٢}ق_{ر+١}}{^{١٢}ق_{ر}} = \frac{٥}{٩}$ ∴ $\frac{١٢ - (ر+١) + ١}{ر+١} = \frac{٥}{٩}$ ∴ $\frac{١٢ - ر}{ر+١} = \frac{٥}{٩}$

ومنها $٩ \times ١٢ - ٩ر = ٥ر + ٥$ ∴ $١٤ر = ١١٢$ ∴ $ر = ٨$

$^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$ ∴ $^{ن+١}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$

∴ $^{ن+١}ق_{٧} = ٣٤٣٢ = {}^{١٤}ق_{٧}$ ∴ $ن + ١ = ١٤$ ∴ $ن = ١٣$

٥) (i) أوجد قيمة $ن$ التي تحقق أن $^{ن}ق_{٣} + ٢(^{ن}ق_{٢}) + ^{ن}ق_{١} = ١٢٠$

(ii) أوجد قيمة $\frac{^{١٧}ق_{٦} + ^{١٧}ق_{٥}}{^{١٨}ق_{٥}}$

الحل (i) $^{ن}ق_{٣} + ^{ن}ق_{٢} + ^{ن}ق_{٢} + ^{ن}ق_{١} = ١٢٠$

$\therefore ^{ن+١}ق_{٣} + ^{ن+١}ق_{٢} = ^{ن+٢}ق_{٣} = ١٢٠ = ^{١٠}ق_{٣}$ (جمع توفيقتين متتاليتين)

$\therefore ن + ٢ = ١٠ \quad \therefore ن = ٨$

(ii) $\frac{^{١٨}ق_{٦}}{^{١٨}ق_{٥}} = \frac{١٨-٦+١}{٦} = \frac{١٣}{٦}$ (قانون النسبة بين توفيقتين)

٦) إذا كان $^{ن}ق_{ر} = {^{ن}ق_{ر-١}}$ ، $^{ن}ل_{ر} = {^{ن}ل_{ر+١}}$ فإن $ن = ...$

الحل $ن = ر + ر - ١ \quad \therefore ن = ٢ر - ١ \longrightarrow I$

$\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر-١} \quad \therefore ن - ر = ١ \quad \therefore ن = ر + ١ \longrightarrow II$

بالحل $ر = ٢$ ومنها $ن = ٣$

٧) إذا كان $^{ن+٢}ل_{ر} = \lfloor ٢ \times {^{ن+٢}ق_{ر}}$ ، $^{ن}ق_{ر+١} : {^{ن}ق_{ر}} = ٥ : ٣$

أوجد قيمة $^{ن}ق_{ن-ر} + {^{ن+٢}ل_{ر-١}}$

الحل $^{ن+٢}ل_{ر} = \lfloor ٢ \; \frac{^{ن+٢}ل_{ر}}{\lfloor ر} \quad \therefore \lfloor ر = \lfloor ٢ \quad \therefore ر = ٢$

$\frac{^{ن}ق_{٣}}{^{ن}ق_{٢}} = \frac{ن-٢+١}{٣} = \frac{٥}{٣} \quad \therefore ن - ٢ = ٥ \quad \therefore ن = ٧$

المطلوب $= {^{٧}ق_{٥}} + {^{١٠}ل_{١}} = {^{٧}ق_{٢}} + ١٠ = \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} + ١٠ = ٣١$

٨) إذا كان $^{١٤}ق_{ر^٢} = {^{١٤}ق_{ر+٢}}$ فما قيمة $ر$

الحل $ر^٢ = ر + ٢ \quad \therefore ر^٢ - ر - ٢ = صفر \quad \therefore (ر-٢)(ر+١) = صفر$

ومنها $ر = ٢$ أو $ر = -١$ مرفوض

أو $ر^٢ + ر + ٢ = ١٤ \quad \therefore ر^٢ + ر - ١٢ = صفر \quad \therefore (ر+٤)(ر-٣) = صفر \quad \therefore ر = ٣$ ، $ر = -٤$ مرفوض



ثالثاً: ذات الحدين

(١) اكتب مفكوك $(١ - س)^{٨}$ ثم استخدم ذلك في إيجاد قيمة $١ - {}^{٨}ق_{١} + {}^{٨}ق_{٢} - {}^{٨}ق_{٣} + \dots + {}^{٨}ق_{٨}$

الحل: $(١ - س)^{٨} = ١ - {}^{٨}ق_{١}\,س + {}^{٨}ق_{٢}\,س^{٢} - {}^{٨}ق_{٣}\,س^{٣} + \dots + {}^{٨}ق_{٨}\,س^{٨}$

بوضع س = ١ ∴ المقدار المطلوب = صفر

(٢) في مفكوك $(١ + حـ س)^{١٠}$ إذا كان معامل الحد الثالث = ١٨٠ وكان $ح_{٥} = ٢١٠$ أوجد قيمة كل من حـ ، س حيث حـ ∈ ص+

الحل: $ح_{٣} = {}^{١٠}ق_{٢}(حـ س)^{٢}$ ∴ $١٨٠ = {}^{١٠}ق_{٢}\,حـ^{٢}$ ∴ $حـ = \pm ٢$

$ح_{٥} = {}^{١٠}ق_{٤}(حـ س)^{٤} = ٢١٠$ ∴ $٢١٠(حـ س)^{٤} = ٢١٠$

∴ $(\pm ٢ س)^{٤} = ١$ ∴ $١٦ س^{٤} = ١$ ∴ $س = \pm \frac{١}{٢}$

(٣) أوجد معامل $س^{٥}$ في مفكوك $(١ - س + س^{٢})(١ + س)^{١١}$

الحل: المقدار $= (١+س)^{١١} - س(١+س)^{١١} + س^{٢}(١+س)^{١١}$

فكرة الحل في $(١+س)^{ن}$: معامل $س^{ر} = {}^{ن}ق_{ر}$

معامل $س^{٥} = {}^{١١}ق_{٥} - ١ \times {}^{١١}ق_{٤} + ١ \times {}^{١١}ق_{٣}$

$= {}^{١١}ق_{٥} - {}^{١١}ق_{٤} + {}^{١١}ق_{٣} = ٤٦٢ - ٣٣٠ + ١٦٥ = ٢٩٧$

(٤) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{٢س})^{١٠}$ وإذا كانت قيمة هذا الحد $= \frac{٢٨}{٢٧}$ أوجد قيمة س

الحل: رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٠}{٢} + ١ = ٦$ ∴ $ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥}(س^{٢})^{٥}(\frac{١}{٢س})^{٥}$

$\frac{٢٨}{٢٧} = ٢٥٢ \times \frac{١}{٣٢} . س^{٥}$ ∴ $س^{٥} = \frac{٢٨ \times ٣٢}{٢٥٢ \times ٢٧} = (\frac{٢}{٣})^{٥}$ ∴ $س = \frac{٢}{٣}$

(٥) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(٢س + ٣ص)^{١٣}$ متساويين فأثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$

الحل: $\frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = ١$ ∴ $\frac{١٣ - ٧ + ١}{٧} \times \frac{٣ص}{٢س} = ١$

∴ $\frac{٣ص}{٢س} = ١$ ∴ $\frac{ص}{س} = \frac{٢}{٣}$ أو $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$ رتبة الأوسطين ٨ ، ٧

(٦) أثبت أن الحد الخالي من س في مفكوك $(س^{٣} + \frac{١}{س^{٢}})^{٥ن}$ هو $\frac{|٥ن}{|٢ن . |٣ن}$

الحل: $ح_{ر+١} = {}^{٥ن}ق_{ر}(س^{٣})^{٥ن - ر} \times (\frac{١}{س^{٢}})^{ر} = {}^{٥ن}ق_{ر}\,س^{١٥ن - ٣ر} \times س^{-٢ر}$

$= {}^{٥ن}ق_{ر}\,س^{١٥ن - ٥ر}$ ولكي يكون خالياً من س ∴ ١٥ن − ٥ر = ٠

ومنها ر = ٣ن ∴ الحد الخالي من س هو $ {}^{٥ن}ق_{٣ن} = \frac{|٥ن}{|٢ن . |٣ن}$

(٧) إذا كان $ح_{٣} ، ح_{٤} ، ح_{٥}$ في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هي ١١٢ ، ٤٤٨ ، ١١٢٠ على الترتيب أوجد قيم ن ، س ، ص

الحل: $\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{٤٤٨}{١١٢}$ ∴ $\frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{س} = ٤$ ∴ $(ن - ٢)\frac{ص}{س} = ١٢$ ← I

$\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{١١٢٠}{٤٤٨}$ ∴ $\frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \frac{ص}{س} = \frac{٥}{٢}$ ∴ $(ن - ٣)\frac{ص}{س} = ١٠$ ← II

بالقسمة $\frac{ن - ٢}{ن - ٣} = \frac{١٢}{١٠}$ ∴ $\frac{ن - ٢}{ن - ٣} = \frac{٦}{٥}$ ∴ ٦ن − ١٨ = ٥ن − ١٠

∴ ن = ٨

بالتعويض في I : $\frac{ص}{س} = ٢$ ∴ ص = ٢س

$ح_{٣} = ١١٢$ ∴ $ {}^{٨}ق_{٢}(س)^{٦} . ص^{٢} = ١١٢$ ∴ $٢٨ س^{٦} \times ٤ س^{٢} = ١١٢$

∴ $س^{٨} = ١$ ∴ س = ±١ ومنها ص = ±٢

(٨) في مفكوك $(١ + س)^{٥}$ إذا كان $٨ح_{٢} ، ٨ح_{٣} ، ٧ح_{٤}$ في تتابع حسابي أوجد قيمة س.

الحل: $٢ \times ٨ح_{٣} = ٨ح_{٢} + ٧ح_{٤}$ ∴ $١٦ = ٨\frac{ح_{٢}}{ح_{٣}} + ٧\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}}$

$١٦ = ٨ \times \frac{٢}{٥ - ٢ + ١} \times \frac{١}{س} + ٧ \times \frac{٥ - ٣ + ١}{٣} \times \frac{س}{١}$

$١٦ = \frac{٤}{س} + ٧س$ ∴ $١٦س = ٤ + ٧س^{٢}$ ∴ $٧س^{٢} - ١٦س + ٤ = ٠$

$(٧س - ٢)(س - ٢) = $ صفر ومنها $س = \frac{٢}{٧}$ ، س = ٢

(٩) اوجد معامل الحد الاوسط في مفكوك $(١ + ٢س + ٢س^{٢} + س^{٢})^{٤}$

الحل المفكوك $= [(١+س)^{٢}]^{٤} = (١+س)^{١٢}$ ∴ الحد الاوسط $= ح_{٧}$

الحد الاوسط $= {}^{١٢}ق_{٦}\ س^{٦}$

(١٠) في مفكوك $(٢س - ٣)^{١٠}$ اوجد قيم س التي تحقق العلاقة

$١٢ ح_{٣} + ١٠ ح_{٤} + ح_{٥} =$ صفر

الحل فكرة الحل

$ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$ ، $ح_{٥}$ متتالية وعليه استخدام قانون النسبة بين حدين متتاليين

بالقسمة على $ح_{٤}$ ∴ $١٢ \frac{ح_{٣}}{ح_{٤}} + ١٠ + \frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} =$ صفر

∴ $١٢ \times \frac{٣}{١٠-٣+١} \times \frac{٢س}{-٣} + ١٠ + \frac{١٠-٤+١}{٤} \times \frac{-٣}{٢س} =$ صفر

$-٢س + ١٠ - \frac{٩}{٢س} =$ صفر بالضرب × ٢س

$-٤س^{٢} + ٢٠س - ٩ =$ صفر ∴ $٤س^{٢} - ٢٠س + ٩ =$ صفر

∴ $(٢س - ١)(٢س - ٩) =$ صفر ومنها س ∈ $\{\frac{١}{٢} ، \frac{٩}{٢}\}$

تدريبات على اسم التعليم اثبت أنه $ن \times ٢^{ن-١} =$

$ن_{ق_{١}} + (٢ \times {}^{ن}ق_{٢}) + (٣ \times {}^{ن}ق_{٣}) + (٤ \times {}^{ن}ق_{٤}) + \dots + ن \times {}^{ن}ق_{ن}$

الحل حاول بنفسك

Scanned by CamScanner

الصورة المثلثية للعدد المركب

٢ - ١ Polar form of a complex number

تفكير ناقد: ما الذى تمثله جميع الأعداد المركبة ع التى جزءها الحقيقى يساوى ٢ على شكل أرجاند.

وضح بالرسم

ما الذى ،، ،، ،، ،، ع حيث |ع| = ٢ ، |ع| ≥ ٢

تفكير ابداعى: باستخدام الاعداد المركبة اثبت أن $ظا^{-1}(\sqrt{2}) + ظا^{-1}(\frac{1}{2\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{2}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}$ ت

ب) $ع_2 = 1 - \sqrt{3}$ ت

ج) $ع_3 = -\sqrt{3}$ ت

د) $ع_4 = 5$

تفكير ناقد: إذا كانت السعة الأساسية للعدد ع هى θ فأوجد السعة الأساسية لكل من الأعداد -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{1}{ع}$

إذا كان |ع| = |ع - ٢| فإن الجزء الحقيقى للعدد ع هو -----

الحل

cos 2π

حاول أن تحل

(٣) اكتب كلًا من الأعداد الآتية فى الصورة المثلثية:

أ) $ع_1 = 8$

ب) $ع_2 = 5$ت

ج) $ع_3 = -3 - 3$ت

حاول أن تحل

(٤) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_1 = 2(جتا \frac{\pi}{3} - ت\ جا \frac{\pi}{3})$

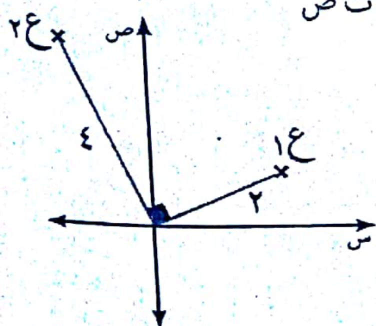
ب) $ع_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(جا 45° - ت\ جا 45°)$

حاول أن تحل

(٥) عبر عن $2(جتا \frac{\pi}{15} + ت\ جا \frac{\pi}{15}) \times 3(جتا \frac{-2\pi}{5} + ت\ جا \frac{-2\pi}{5})$ بالصورة س + ت ص

حاول أن تحل

(٦) باستخدام مستوى أرجاند المقابل، أوجد $\frac{ع_2}{ع_1}$ على الصورة س + ص ت



(٧) إذا كان $ع_1 = 2(جتا 10° + ت\ جا 10°)$ ، $ع_2 = 3(جتا 40° + ت\ جا 40°)$

أوجد: العدد $ع_1^4\ ع_2^3$ على الصورة س + ص ت

(٨) اكتب الصورة الأسية للعدد ع = ٢ت ÷ (١ + ت)

(٩) إذا كان $ع_1 = 1 - \sqrt{2}$ ت ، $ع_2 = 1 +$ ت اوجد كلا مما يأتى فى الصورة الأسية

أ) $ع_1 . ع_2$ ب) $ع_2 \div ع_1$ جـ) $(ع_2)^6$

(١٠) تفكير ابداعي: أثبت أن $جتا \theta = \frac{1}{2}(هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت})$ ، $جا \theta = \frac{-ت}{2}(هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت})$

(١١) إذا كان $ع_١ = ٢ \left[جا \frac{\pi}{٣} + ت\, جتا \frac{\pi}{٣} \right]$ ، $ع_٢ = \sqrt{٢} \left[جا \frac{\pi}{٤} - ت\, جتا \frac{\pi}{٤} \right]$

$ع_٣ = ١ + \sqrt{٣}\, ت$ اوجد العدد $ع = ع_١^٣ \cdot ع_٢^٤ \div ع_٣^٣$

على الصورة الأسية ثم اوجد الجذرين التربيعيين في الصورة المثلثية

الحل

$ع_١ = ٢ [جتا (٩٠ - ٦٠) + ت\, جا (٩٠ - ٦٠)] = ٢ [جتا ٣٠ + ت\, جا ٣٠]$

$\therefore ع_١^٣ = ٨ [جتا ٩٠ + ت\, جا ٩٠] = ٨ ت = ٨ هـ^{\frac{\pi}{٢} ت}$

$ع_٢ = \sqrt{٢} \left[جتا (-٩٠ + ٤٥) + ت\, جا (-٩٠ + ٤٥) \right] = \sqrt{٢} [جتا (-٤٥) + ت\, جا (-٤٥)]$

$ع_٢^٤ = ٤ [جتا (-١٨٠) + ت\, جا (-١٨٠)] = ٤ [جتا ١٨٠ + ت\, جا ١٨٠] = -٤$

بإضافة ٣٦٠

$= ٤ هـ^{\pi ت}$

$ع_٣ = ٢ [جتا ٦٠ + ت\, جا ٦٠] = ٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$ $\therefore ع_٣^٥ = ٢^٥ [جتا ٣٠٠ + ت\, جا ٣٠٠]$

$\therefore ع_٣^٥ = ٣٢ [جتا (-٦٠) + ت\, جا (-٦٠)] = ٣٢ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}$

$ع = ع_١^٣ \cdot ع_٢^٤ \div ع_٣^٥ = \frac{٨ هـ^{\frac{\pi}{٢} ت} \times ٤ هـ^{\pi ت}}{٣٢ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}} = هـ^{\frac{١١\pi}{٦} ت}$

$ع = هـ^{(-٢\pi + \frac{١١\pi}{٦}) ت}$

$\therefore ع = هـ^{-\frac{\pi}{٦} ت}$

$ع = هـ^{-\frac{\pi}{٦} ت} = جتا (-٣٠) + ت\, جا (-٣٠)$

$ع^{\frac{١}{٢}} = جتا \left(\frac{-٣٠ + ٣٦٠ ن}{٢} \right) + ت\, جا \left(\frac{-٣٠ + ٣٦٠ ن}{٢} \right)$

بوضع ن = صفر، ١

$\therefore$ الجذر الأول $= جتا (-١٥) + ت\, جا (-١٥) = هـ^{-\frac{\pi}{١٢} ت}$

الجذر الثاني $= جتا ١٦٥ + ت\, جا ١٦٥ = هـ^{\frac{١١\pi}{١٢} ت}$

خد بالك الجذران ونقطة الاصل مستقيمة

الثاني ، ١٦٥ ، −١٥ ، الأول

(١٢) ضع العدد $ع = \frac{١٦}{١ + \sqrt{٣}\, ت}$ على الصورة الأسية ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع في صورة أويلر

الحل

$ع = \frac{١٦ هـ^{0 ت}}{٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}} = ٨ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}$

س = ١ ، ص = $\sqrt{٣}$ ∴ ر = ٢
ظا θ = $\sqrt{٣}$ ∴ θ = ٦٠°
لاحظ العدد في الربع الأول

$ع^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٨}\; هـ^{\frac{١}{٣}(٢ ر \pi - \frac{\pi}{٣}) ت}$ بوضع ر = ٠ ، ١ ، −١

∴ الجذر الأول = $٢ هـ^{-\frac{\pi}{٩} ت}$ ، الثاني = $٢ هـ^{\frac{٥\pi}{٩} ت}$ ، الثالث = $٢ هـ^{-\frac{٧\pi}{٩} ت}$

(١٣) أوجد الصورة المثلثية لقيم المقدار $(\sqrt{٣} + ت)^{\frac{٢}{٣}}$

الحل

بالنسبة للعدد $\sqrt{٣} + ت$: المقياس = ٢ ، السعة = ٣٠°

∴ صورته المثلثية ٢ [جتا ٣٠ + ت جا ٣٠]

∴ $ع^{\frac{٢}{٣}} = [ع^{٢}]^{\frac{١}{٣}} = [٤ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)]^{\frac{١}{٣}}$

$= \sqrt[٣]{٤}\; هـ^{\frac{١}{٣}(٢ ر \pi + \frac{\pi}{٣}) ت}$ بوضع ر = ٠ ، ١ ، −١

∴ القيم $\sqrt[٣]{٤}\; هـ^{\frac{\pi}{٩} ت}$ ، $\sqrt[٣]{٤}\; هـ^{\frac{٧\pi}{٩} ت}$ ، $\sqrt[٣]{٤}\; هـ^{-\frac{٥\pi}{٩} ت}$

(١٤) أوجد $\sqrt{٧ - ٢٤ ت}$ بدون استخدام نظرية ديموافر

الحل

نفرض أن $\sqrt{٧ - ٢٤ ت} = س + ص ت$

∴ $س^{٢} - ص^{٢} + ٢ س ص ت = ٧ - ٢٤ ت$ بمساواة الحقيقي والتخيلي

$س^{٢} - ص^{٢} = ٧$ ، $٢ س ص = -٢٤$ خذ بالك ان $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

بالحل ∴ س = ± ٤ ، ص = ± ٣ ∵ $س ص < ٠$

∴ س ، ص مختلفين في الإشارة ∴ الجذران $(٤ - ٣ ت)$ ، $(-٤ + ٣ ت)$

(١٥) أوجد $\overline{(٣ + \omega^{٢})}$ ، $\overline{(ت + \omega)}$ ، $\overline{٣}$

الحل

$٣ + \omega^{٢}$ مرافقه $٣ + \omega$ ، $ت + \omega$ مرافقه $-ت + \omega^{٢}$ ، $\overline{٣} = ٣$

(١٦) إذا كان $(١ + \omega^{٢})^{١١} = أ + ب \omega$ فإن أ + ب = ----

الحل

$(-\omega)^{١١} = -\omega^{١١} = -\omega^{٢} = ١ + \omega$ ∴ أ = ١ ، ب = ١ ∴ أ + ب = ٢

(١٧) حل المعادلة فى ك حيث $س^{٢} = ٨$ ثم أوجد مجموع جذورها

الحل $س^{٢} = ٨ هـ^{ت} = ٨ هـ^{٢ ط ن ت}$

∴ س = ٢ ، ٢ ω ، ٢ $ω^{٢}$ ∴ مجموعها = صفر ، حاصل ضربها = ٨

(١٨) أوجد مجموع جذور المعادلة $(ع - ٥)^{٣} = ١$

الحل $(ع - ٥)^{٣}$ = جتا ٠ + ت جا ٠ = جتا (٢ ط ن) + ت جا (٢ ط ن)

ع − ٥ = جتا $\frac{٢ ط ن}{٣}$ + ت جا $\frac{٢ ط ن}{٣}$ = ١ ، ω ، $ω^{٢}$

∴ ع = ٥ + ١ ، ع = ٥ + ω ، ع = ٥ + $ω^{٢}$ ∴ مجموعها = ١٥

(١٩) أوجد المعادلة التربيعية التى جذراها $\frac{١}{ω + ١}$ ، $\frac{١}{ω^{٢} + ١}$

الحل الجذر الأول = $\frac{١}{-ω^{٢}}$ = − ω ، الجذر الثانى = $\frac{١}{-ω}$ = − $ω^{٢}$

مجموع الجذرين = − ω − $ω^{٢}$ = ١ ، حاصل ضربهما = ١

المعادلة هى $س^{٢}$ − س + ١ = صفر

(٢٠) أوجد قيمة $(١ - \frac{١}{ω})(١ - \frac{١}{ω^{٢}})(١ - \frac{١}{ω^{٤}})(١ - \frac{١}{ω^{٨}})$ إلى ١٢ عامل

الحل المقدار = $(١ - ω^{٢})(١ - ω)(١ - ω^{٢})(١ - ω)$ ..... إلى ١٢ عامل

= $[(١ - ω^{٢})(١ - ω)]^{٦}$ = $[(١ - ω^{٢})^{٢}]^{٣} × [(١ - ω)^{٢}]^{٣}$

= $(-٢ω^{٢})^{٣} × (-٣ω)^{٣}$ = $(٩)^{٣}$ = ٧٢٩

(٢١) أثبت أنه مهما كانت قيم أ ، ب ، جـ ، د فإن $\left(\frac{أ - بω^{٢}}{أω - ب} - \frac{جـ - دω}{جـω^{٢} - د}\right)^{٤} = ٩$

الحل $\left(\frac{أω^{٢} - بω^{٢}}{أω - ب} - \frac{جـω^{٢} - دω}{جـω^{٢} - د}\right)^{٤}$

= $\left[\frac{ω^{٢}[أω - ب]}{[أω - ب]} - \frac{ω[جـω^{٢} - د]}{[جـω^{٢} - د]}\right]^{٤}$

= $(ω^{٢} - ω)^{٤}$

= $(\pm \sqrt{٣} ت)^{٤}$ = ٩

∴ لا يعتمد على أ ، ب ، جـ ، د

أولاً المحددات

حاول أن تحل

(١) أثبت أن
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

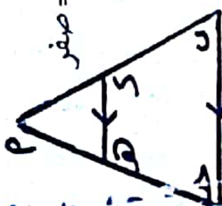
حاول أن تحل

(٢) بدون فك المحدد أثبت أن
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

حاول أن تحل

(٤) إذا كان
$$\begin{vmatrix} أ & د & م \\ ب & هـ & ن \\ جـ & و & ع \end{vmatrix} = 10$$
أوجد فيه
$$\begin{vmatrix} 2أ & 2د & 2م \\ ب & هـ & ن \\ -4جـ & -4و & -4ع \end{vmatrix}$$

(٣) الربط بالهندسة: في الشكل المقابل $\overline{ده} // \overline{بجـ}$ أثبت أن
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ ده & اد & اه \\ بجـ & اب & اجـ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$



حاول أن تحل

(٥) أوجد المحدد م = م١ + م٢ + م٣ حيث
$$م_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} ، \quad م_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} ، \quad م_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

حاول أن تحل

(٦) بدون فك المحدد أوجد قيمة
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ -3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

حاول أن تحل

(٧) بدون فك المحدد أثبت أن
$$\begin{vmatrix} أ-ب-جـ & 2ب & 2جـ \\ 2أ & ب-جـ-أ & 2جـ \\ 2أ & 2ب & جـ-أ-ب \end{vmatrix} = (أ+ب+جـ)^3$$

(٨) بدون فك المحددات أثبت أن
$$\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ب & أ & جـ \\ ب & جـ & أ \end{vmatrix} = (أ-ب)(أ-جـ)(أ+ب+جـ)$$

(٩) بدون فك أثبت أن
$$\begin{vmatrix} ب جـ & أ^2 & أ^2 \\ ب^2 & جـ أ & ب^2 \\ جـ^2 & جـ^2 & أ ب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب جـ & أ ب & أ جـ \\ أ ب & أ جـ & ب جـ \\ أ جـ & ب جـ & أ ب \end{vmatrix}$$

(١٠) أوجد قيمة ك التي تجعل س عامل من عوامل المحدد
$$\Delta = \begin{vmatrix} س+1 & 3 & 1 \\ ك & 2 & 3 \\ س & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

اجابة المحددات

(١) بتدوير المحدد الاول نحصل على الثاني

(٢) ∵ ع٢ = ع١ ∴ Δ = صفر

(٣) بأخذ ٢ مشترك من ص١ ، -٤ من ص٣

∴ المحدد المطلوب = ٢ × -٤ $\begin{vmatrix} ٣ & د & أ \\ ٨ & هـ & ب \\ ٤ & و & جـ \end{vmatrix}$ = -٨ × ١٠ = -٨٠

(٤) ∵ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$ ∴ Δ أدهـ ~ Δ أبجـ ∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{دهـ}{بجـ}$

نفرض ان كل نسبة = ل ∴ أد = ل أب ، أهـ = ل أجـ ، دهـ = ل بجـ

بالتعويض في المحدد نجد أن ص١ = ل ص٢ ∴ Δ = صفر

(٥)

$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٥ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ & -١ \\ -١ & ٤ & \text{صفر} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{vmatrix}$

∴ ع١ + ع٢ + ع٣ = $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ٤ \\ -١ & ٤ & \text{صفر} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٥ & ١ & ٤ \\ -١ & ١ & \text{صفر} \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٤ \\ -١ & ٥ & \text{صفر} \end{vmatrix}$

(٦) ص٢ = - ص٢ ∴ قيمة المحدد = صفر

(٧) ع٢ + ع١ ثم ع٣ + ع١ أو (ع٢ + ع٣) + ع١ ثم (أ+ب+جـ) مشترك من ع١

(أ+ب+جـ) $\begin{vmatrix} ٢جـ & ٢ب & ١ \\ ٢جـ & ب-جـ-أ & ١ \\ جـ-أ-ب & ٢ب & ١ \end{vmatrix}$ ص٢ - ص١ ، ص٣ - ص١

= (أ+ب+جـ) $\begin{vmatrix} ٢جـ & ٢ب & ١ \\ \text{صفر} & -(أ+ب+جـ) & \text{صفر} \\ -(أ+ب+جـ) & \text{صفر} & \text{صفر} \end{vmatrix}$

= (أ+ب+جـ) × ١ × -(أ+ب+جـ) × -(أ+ب+جـ) = $(أ+ب+جـ)^{٣}$

(٨) (ع١ + ع٢ + ع٣) ثم (أ + ب + جـ) مشترك من ع١

$$\therefore \Delta = (أ+ب+جـ)\begin{vmatrix} جـ & ب & 1 \\ جـ & أ & 1 \\ أ & جـ & 1 \end{vmatrix}$$ ص٢ - ص١ ، ص٣ - ص١

$$\Delta = (أ+ب+جـ)\begin{vmatrix} جـ & ب & 1 \\ صفر & أ-ب & صفر \\ أ-جـ & جـ-أ & صفر \end{vmatrix}$$ ع٢ + ع٣

$$= (أ+ب+جـ)\begin{vmatrix} جـ & ب+جـ & 1 \\ صفر & أ-ب & صفر \\ أ-جـ & صفر & صفر \end{vmatrix} = (أ+ب+جـ)(أ-ب)(أ-جـ)$$

(٩) بضرب ع١ × أ ، ع٢ × ب ، ع٣ × جـ وخارج المحدد × $\frac{1}{أ.ب.جـ}$

$$\Delta = \frac{1}{أ.ب.جـ}\begin{vmatrix} أ^2جـ & أ^2ب & أبجـ \\ ب^2جـ & أبجـ & أب^2 \\ أبجـ & بجـ^2 & أجـ^2 \end{vmatrix}$$

بأخذ أ مشترك من ص١ ، ب مشترك من ص٢ ، جـ مشترك من ص٣

$$= \frac{أ.ب.جـ}{أ.ب.جـ}\begin{vmatrix} أجـ & أب & بجـ \\ بجـ & أجـ & أب \\ أب & بجـ & أجـ \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

(١٠) ∵ س أحد العوامل ∴ س = صفر تجعل Δ = صفر

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & ل \\ 1 & 2 & صفر \end{vmatrix} = $$ ص٢ - ل ص١ ∴ $$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ ل-3 & 2-3ل & صفر \\ 1 & 2 & صفر \end{vmatrix}$$

∴ ع٢ - ٢ع١

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ل-3 & 2-3ل-6+2ل & صفر \\ 1 & صفر & صفر \end{vmatrix} = صفر$$

∴ - ٤ - ل = صفر

∴ ل = - ٤

ثانيا المصفوفات

حاول أن تحل

(١) أوجد قيم أ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ٩ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى.

حاول أن تحل

(٢) حدد هل للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣- & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ معكوس ضربى؟

حاول أن تحل

(٣) أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣- \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ & ٧ \end{pmatrix}$

مثال

(٤) أوجد المصفوفة الملحقة للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ ١- & ٢ & ١- \\ ٠ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

الحل

نوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ١- & ١- \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢ & ١- \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١- & ١- \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ١- & ٢ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٧ & ١ & ٥- \\ ١٥ & ٢ & ١٠- \\ ٦- & ١- & ٤ \end{pmatrix}$

∴ ب^{مل} = $\begin{pmatrix} ٧ & ١٥ & ٦- \\ ١ & ٢ & ١- \\ ٥- & ١٠- & ٤ \end{pmatrix}$

تفكير ناقد من المثال السابق أوجد قيمة كل من: ب ب^{مل} ، ب^{مل} ب ماذا تلاحظ؟

حاول أن تحل

(٦) أوجد المعكوس الضربى لكل المصفوفات الآتية إن أمكن:

أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١- & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٧ & ٢ & ٢- \\ ٢ & ٣- & ٣ \end{pmatrix}$

حاول أن تحل

(٧) فى المثال السابق تحقق من الخواص الآتية:

أولًا: $(أ^{-١})^{مد} = (أ^{مد})^{-١}$ ثانيًا: $(أ^{-١})^{٢} = (أ^{٢})^{-١}$

تفكير إبداعى: إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix}$ فأثبت أن أ^{٢} - ٧أ = ١٨ ▭ ومن ذلك أوجد أ$^{-١}$

(٥) أوجد رتبة كل من س، ص

س = $\begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ٣- \\ ٣ & ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

ص = $\begin{pmatrix} ١,٥ & ٣ & ٩ \\ ١ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$

(٨) تفكير ناقد

أوجد قيمة ك إذا كان ر(أ) = ٢ حيث

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١- \end{pmatrix}$

(٩) إذا كان ر(ب) = ٣ أوجد قيمة ك ∈ ح حيث

ب = $\begin{pmatrix} ١- & ٣ & ١ \\ ٠ & ك & ٢ \\ ٣ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$

(١٠) بين أن النظام س+ص+٢ع = ٠ ، س+ص-ع = صفر ، ٢س+٢ص+ع = ٠ له حلول غير صفرية

(١١) بين أن النظام ٣س+٢ص+٥ع = صفر ، ٢س-ص+٤ع = صفر ، ٧س+٩ص+١٥ع = صفر ، له عدد لا نهائي من الحلول واكتب صورة الحل واستنتج أحد الحلول

(١٢) أوجد قيمة س التى تجعل المصفوفات الآتية منفردة

أ = $\begin{pmatrix} س-٢ & ٢ \\ ٧ & س+٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ١- & ٣ \\ ٢س & ٢س & س+١ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

تمرينات على الوحدة الأولى

س١: بعد النقطة (٣ ، -١ ، ٢) عن المستوى س ع =

الحل: بعد النقطة عن المستوى س ع = |ص| = |-١| = ١

س٢: طول العمود المرسوم من (-٢ ، ٣ ، ٤) على محور س =

الحل: طول العمود المرسوم من نقطة على محور السينات = $\sqrt{ص^2 + ع^2}$

∴ طول العمود = $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ وحدة طول

س٣: اذا كانت ج (٢ ، ٢ ، ٦) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١ ، -٤ ، ٠) فإن ب =

الحل:

أ (١ ، -٤ ، ٠) — ج (٢ ، ٢ ، ٦) — ب (س ، ص ، ع)

(٢ ، ٢ ، ٦) = $\left(\frac{1+س}{2} ، \frac{-4+ص}{2} ، \frac{0+ع}{2}\right)$

∴ ب = (٣ ، ٨ ، ١٢)

س٤: اذا كان $\vec{أ}$ = (٤ ، -ل ، ٦) ، ب = (٢ ، ٢ ، م) وكان $\vec{أ}$ // ب فإن ل + م =

الحل: ∵ $\vec{أ}$ // ب

$\frac{س_1}{س_2} = \frac{ص_1}{ص_2} = \frac{ع_1}{ع_2}$ = ك

∴ $\frac{4}{2} = \frac{-ل}{2} = \frac{6}{م}$ ومنها ل = -٤ ، م = ٣

∴ م + ل = ٣ + (-٤) = ...

س٥: اذا كان $\vec{أ}$ = (-٣ ، ١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٤ ، -١) فإن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\vec{أ}$ ، ب ضلعان متجاوران =

الحل: مساحة ▱ = || $\vec{أ}$ × ب ||

$\vec{أ}$ × ب =
$\hat{س}$	$\hat{ص}$	$\hat{ع}$
-٣	١	٢
٣	٤	-١

= -٩ $\hat{س}$ + ٣ $\hat{ص}$ - ١٥ $\hat{ع}$

∴ مساحة ▱ = $\sqrt{(-9)^2 + (3)^2 + (-15)^2}$ = $\sqrt{315}$ = ٣$\sqrt{35}$ وحدة مربعة

Scanned by CamScanner

س٦ : أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف متجاورة تمثلها المتجهات $\overline{أ} = (١، -١، ٢)$ ، $\overline{ب} = (٣، -٢، ٠)$ ، $\overline{جـ} = (٠، ٢، ٤)$

الحل : حجم متوازي السطوح $= \overline{أ} \cdot \overline{ب} \times \overline{جـ}$

$$\text{قياس} \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١(-٨) + ١(١٢) + ٢(٦)$$

$= |-٨ + ١٢ + ١٢| = |١٦|$

$= ١٦$ وحدة مكعبة

س٧ : أوجد المركبة الاتجاهية للمتجه $\overline{أب}$ حيث $أ(٢، ١، ٠)$ ، $ب(٣، ١، ٢\sqrt{٣})$ في اتجاه $\overline{جـ} = (٣، ٢، ٢\sqrt{٣})$

الحل : $\overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (١، ٠، \sqrt{٣})$

المركبة الاتجاهية للمتجه $\overline{أب}$ في اتجاه $\overline{جـ}$ هي $\frac{\overline{أب} \cdot \overline{جـ}}{\|\overline{جـ}\|^{٢}} \overline{جـ}$

$$= \frac{(٣، ٢، ٢\sqrt{٣}) \cdot (١، ٠، \sqrt{٣})}{\sqrt{٩+٤+١٢}} \cdot \frac{(٣، ٢، ٢\sqrt{٣})}{\sqrt{٩+٤+١٢}}$$

$$= \frac{٣ + \text{صفر} + ٦}{٥} \cdot \frac{(٣، ٢، ٢\sqrt{٣})}{٥} = \frac{٩}{٢٥}(٣، ٢، ٢\sqrt{٣})$$

$$= \left(\frac{٢٧}{٢٥}، \frac{١٨}{٢٥}، \frac{١٨\sqrt{٣}}{٢٥}\right)$$

س٨ : إذا كان $\overline{أ} = (ل، -٣، ١)$ ، $\overline{ب} = (٢، ٣، -ل)$ متعامدين فأوجد $ل$ =

الحل : $\because \overline{أ} \perp \overline{ب}$ $\therefore \overline{أ} \cdot \overline{ب} = \text{صفر}$

$\therefore (ل، -٣، ١) \cdot (٢، ٣، -ل) = \text{صفر}$

$٢ل - ٩ - ل = ٠$

$\therefore ل = ٩$

س١٤: أوجد معادلة الكرة التي قطرها أب حيث أ(٧، ١، -٤)، ب(٣، -١، ٢)

الحل: م مركز الكرة هو منتصف أب ∴ م(٥، ٠، -١)

نق = م أ = √((٧ - ٥)² + (١ - ٠)² + (-٤ + ١)²) = √١٤

∴ معادلة الكرة هي (س - ٥)² + (ص - ٠)² + (ع + ١)² = ١٤

الصورة العامة هي س² + ص² + ع² - ١٠س + ٢ع + ١٢ = ٠

س١٥: إذا كانت النقطة (-٢، ٤، م) تقع على الكرة (س + ٢)² + (ص - ١)² + (ع - ٣)² = ٢٥ فأوجد قيمة م

الحل: ∵ النقطة (-٢، ٤، م) تقع على الكرة ∴ تحقق معادلة الكرة

∴ (-٢ + ٢)² + (٤ - ١)² + (م - ٣)² = ٢٥

٩ + (م - ٣)² = ٢٥ ∴ (م - ٣)² = ١٦

∴ م - ٣ = ±٤ ∴ م = ٧ أو م = -١

س١٦: إذا قطع محور السينات الكرة التي مركزها (٣، -٤، ١٢) وطول نصف قطرها ١٣ سم في النقطتين أ، ب فإن طول أب = ... وحدة

الحل: ∵ معادلة الكرة (س - ل)² + (ص - ك)² + (ع - ن)² = نق²

∴ (س - ٣)² + (ص + ٤)² + (ع - ١٢)² = ١٦٩

∵ محور السينات يقطع الكرة ∴ النقطة (س، ٠، ٠) تحقق معادلة الكرة

∴ (س - ٣)² + (٠ + ٤)² + (٠ - ١٢)² = ١٦٩

∴ (س - ٣)² + ١٦ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ (س - ٣)² = ٩ بأخذ الجذر

|س - ٣| = ٣

س - ٣ = ٣ | س - ٣ = -٣

س = ٦ | س = ٠

∴ أ(٦، ٠، ٠)، ب(٠، ٠، ٠)

∴ طول أب = ٦ وحدة طول

س٩: اذا كان $\vec{أ} = (-\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٤} ، ك)$ متجه وحدة فإن ك = ...

الحل:

∵ $\vec{أ}$ متجه وحدة ∴ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١$

∴ $(-\frac{١}{٢})^٢ + (\frac{٣}{٤})^٢ + ك^٢ = ١$ ∴ $ك^٢ = \frac{٣}{١٦}$

∴ $ك = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٤}$

س١٠: اذا كان $||\vec{أ}|| = ٤$ ، $||\vec{ب}|| = ٦$ حيث $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهان قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن $(٢\vec{أ} + \vec{ب}) \cdot (\vec{أ} - \vec{ب}) = ...$

الحل: $(٢\vec{أ} + \vec{ب}) \cdot (\vec{أ} - \vec{ب}) = ٢||\vec{أ}||^٢ - \vec{أ} \cdot \vec{ب} - ||\vec{ب}||^٢$

$= ٢ \times ١٦ - (||\vec{أ}|| \cdot ||\vec{ب}|| \text{ جتا } \theta) - ٣٦ =$

$٣٢ - ٤ \times ٦ \times \text{جتا } ٦٠ - ٣٦ = \boxed{-١٦}$

س١١: قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\vec{أ} = (٣ ، ٤ ، ١٢)$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي ....

الحل:

∵ $\text{جتا } \theta_س = \frac{أ_س}{||\vec{أ}||} = \frac{٣}{\sqrt{٩ + ١٦ + ١١}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ $\theta = ٦٠°$

س١٢: اوجد قياس الزاوية بين المتجهين

$\vec{أ} = ٥\vec{س} + \vec{ص} - ٢\vec{ع}$ ، $\vec{ب} = \vec{س} + \vec{ص} - \vec{ع}$

الحل: ∵ $\text{جتا } \theta = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{||\vec{أ}|| \cdot ||\vec{ب}||} = \frac{(٥ ، ١ ، -٢) \cdot (١ ، ١ ، -١)}{\sqrt{٢٥ + ١ + ٤} \sqrt{١ + ١ + ١}}$

$\text{جتا } \theta = \frac{٥ + ١ + ٢}{\sqrt{٣٠} \times \sqrt{٣}} = \frac{٨}{\sqrt{٣٠} \times \sqrt{٣}}$ ∴ $\theta = ٣٢° \ ٣١' \ ٦''$

س١٣: اوجد مركز وطول نصف قطر الكرة التي معادلتها

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢س - ٢ص - ٤ع - ٣ = \text{صفر}$

الحل: م $(-\frac{١}{٢} \text{معامل س} ، -\frac{١}{٢} \text{معامل ص} ، -\frac{١}{٢} \text{معامل ع}) = (-١ ، ١ ، ٢)$

$نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - د} = \sqrt{١ + ١ + ٤ - (-٣)} = \sqrt{٩} = ٣$ وحدة طول

تدريبات على الوحدة الثانية

س١: اثبت أن المستقيمين $ر_١ = (٣، -٣، ٥) + ل_١ (٠، -٥، ٥)$

$ر_٢ = (-٢، ٣، ١) + ل_٢ (٥، -١، -١)$ متعامدان ومتقاطعان في نقطة واوجد احداثيات نقطة تقاطعهما

الحل: ∵ $ه_١ = (٠، -٥، ٥)$ ، $ه_٢ = (٥، -١، -١)$

$ه_١ \cdot ه_٢ = صفر + ٥ - ٥ = صفر$ ∴ المستقيمان متعامدان

لاثبات انهما متقاطعان: نبحث عن قيم لـ $ل_١$ ، $ل_٢$ تجعل $ر_١ = ر_٢$

∴ $٣ + صفر\, ل_١ = -٢ + ٥ل_٢ \Leftarrow ٥ل_٢ = ٥ \Leftarrow ل_٢ = ١$

$-٣ - ٥ل_١ = ٣ - ل_٢ \Leftarrow ٥ل_١ - ل_٢ = -٦ \Leftarrow ل_١ = -١$

بالتعويض في $٥ + ٥ل_١ = ١ - ل_٢$

الأيمن $٥ + ٥(-١) = صفر$ ، الأيسر $= ١ - ١ = صفر$ ∴ المستقيمان متقاطعان

نقطة التقاطع $ر_١ = (٣، -٣، ٥) + (-١)(٠، -٥، ٥)$

∴ نقطة التقاطع هي $(٣، ٢، ٠)$

س٢: اثبت أن المستقيمين $ر_١ = (٣، -١، ٢) + ل_١ (٤، ١، ٣)$ ،

$ر_٢ = (٠، ٤، -١) + ل_٢ (١، -١، ٢)$ متخالفان

الحل: $ه_١ = (٤، ١، ٣)$ ، $ه_٢ = (١، -١، ٢)$

∵ $\frac{٤}{١} \neq \frac{١}{-١} \neq \frac{٣}{٢}$ ∴ $ر_١$ لا يوازي $ر_٢$

لاثبات أنهما متخالفان نثبت أنهما غير متقاطعين

بمساواة المركبات

$٣ + ٤ل_١ = ٠ + ل_٢ \Leftarrow ٤ل_١ - ل_٢ = -٣ \Leftarrow (١)$

$-١ + ل_١ = ٤ - ل_٢ \Leftarrow ل_١ + ل_٢ = ٥ \Leftarrow (٢)$

$٢ + ٣ل_١ = -١ + ٢ل_٢ \Leftarrow ٣ل_١ - ٢ل_٢ = -٣ \Leftarrow (٣)$

بحل ١، ٢ ينتج أن $ل_١ = \frac{٢}{٥}$ ، $ل_٢ = \frac{٢٣}{٥}$

بالتعويض في (٣) لا تتحقق ∴ لا توجد قيم لـ $ل_١$ ، $ل_٢$ تحقق المعادلات

∴ المستقيمان غير متقاطعين وغير متوازيين

∴ المستقيمان متخالفان

س٣ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويقطع المستقيم

ر = (٣، ١، ٤) + ك (٢، ١، ٣) على التعامد

الحل:

متجه اتجاه المستقيم المعلوم هو ى١

ى١ = (٢، ١، ٣)

نفرض أن نقطة التقاطع هي ح (٣ + ٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)

∵ (٠، ٠، ٠) ∈ المستقيم المطلوب

∴ ى٢ = و ح = ح - و = (٣ + ٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)

∵ ى١ ⊥ ى٢ ∴ ى١ · ى٢ = ٠ لأنهما متعامدان

٦ + ٤ك + ١ + ك + ١٢ + ٩ك = صفر

١٤ك = -١٩ ∴ ك = $\frac{-١٩}{١٤}$

∴ ى٢ = ($\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{-٥}{١٤}$ ، $\frac{-١}{١٤}$)

وعليه تبسيط ى٢ بالضرب × ١٤

∴ ى٢ = (٤ ، -٥ ، -١)

∴ معادلة المستقيم هي ر = ك (٤ ، -٥ ، -١)

أي $\frac{س}{٤} = \frac{ص}{-٥} = \frac{ع}{-١}$

س٤: اثبت أن المستقيمين ل١: ٢س = ٣ص = ٤ع ، ل٢: ٣س = ٢ص = ٥ع متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذي يحتويهما

الحل: ل١: ٢س = ٣ص = ٤ع بالقسمة ÷ ١٢ ∴ $\frac{س}{٦} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٣}$

يمر بنقطة الأصل ، ى١ = (٦، ٤، ٣)

ل٢: بالقسمة ÷ ٣٠ ∴ $\frac{س}{١٠} = \frac{ص}{١٥} = \frac{ع}{٦}$ يمر بنقطة الأصل ، ى٢ = (١٠، ١٥، ٦)

∴ المستقيمان متقاطعان في نقطة الأصل (٠، ٠، ٠) لإيجاد معادلة المستوى الذي يحتويهما

نوجد ن = ى١ × ى٢ =

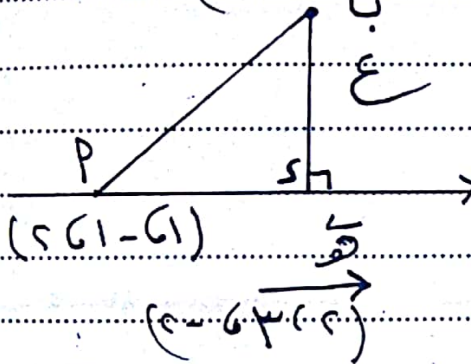
سَ ⊕	صَ ⊖	عَ ⊕
٦	٤	٣
١٠	١٥	٦

= (-٢١ ، -٦ ، ٥٠)

∴ معادلة المستوى ن · ر = ن · أ ∴ -٢١س - ٦ص + ٥٠ع = صفر

س ٥: اوجد طول العمود المرسوم من النقطة ب $(٢، ١، -٤)$ على المستقيم

ر $= (١، -١، ٢)$ أ $+$ ل $(٢، ٣، -٢)$



الحل:

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (١، ٢، -٦)$

مسقط $\overrightarrow{أب}$ في اتجاه $\overrightarrow{هـ}$ = أد

$$أد = \frac{\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{هـ}}{\|\overrightarrow{هـ}\|} = \frac{(١، ٢، -٦)\cdot(٢، ٣، -٢)}{\sqrt{٤+٩+٤}}$$

$$أد = \frac{٢+٦+١٢}{\sqrt{١٧}} = \frac{٢٠}{\sqrt{١٧}}$$

$أب = \sqrt{١+٤+٣٦} = \sqrt{٤١}$

∴ طول العمود ع $= \sqrt{(أب)^2 - (أد)^2}$

$$= \sqrt{٤١ - \frac{٤٠٠}{١٧}} \simeq ٤٫١٨$$

حل آخر:

$$\text{طول العمود ع} = \frac{\|\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ}\|}{\|\overrightarrow{هـ}\|} = \frac{\sqrt{(١٤)^2 + (-١٠)^2 + (-١)^2}}{\sqrt{٤+٩+٤}} \simeq ٤٫١٨$$

$$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س}^{+} & \overrightarrow{ص}^{-} & \overrightarrow{ع}^{+} \\ ١ & ٢ & -٦ \\ ٢ & ٣ & -٢ \end{vmatrix} = (١٤، -١٠، -١)$$

س ٦: اوجد نقط تقاطع المستقيم ر $= (١، ٤، ٢) +$ ل $(٣، ٢، ٢)$ مع المستوى $(٣، ٢، ٢) \cdot$ ر $= -٢$

الحل: نفرض أن نقطة التقاطع هي ر $= (١+٣ل، ٤+٢ل، ٢+٢ل)$

تحقق المستقيم وتحقق المستوى

∴ $(٣، ٢، ٢) \cdot (١+٣ل، ٤+٢ل، ٢+٢ل) = -٢$

∴ $٣ + ٩ل + ٨ + ٤ل + ٤ + ٤ل = -٢$ ومنها ل $= -١$

∴ نقط التقاطع هي $(١+٣\times(-١)، ٤+٢\times(-١)، ٢+٢(-١))$

$= (-٢، ٢، \text{صفر})$.

Scanned by CamScanner

س٧ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-٢، ١، ٤) على المستوى الذي معادلته ر · (١، -٣، ٢) = ٤

الحل: (س١، ص١، ع١) = (-٢، ١، ٤)

معادلة المستوى (الإحداثية) هي س - ٣ص + ٢ع = ٤ -

∴ طول العمود ل = $\frac{|أ س_1 + ب ص_1 + حـ ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}}$

∴ ل = $\frac{|١ \times (-٢) + (-٣) \times ١ + ٢ \times ٤ + (-٤)|}{\sqrt{١ + ٩ + ٤}} = \frac{١}{\sqrt{١٤}}$ وحدة طول

س٨: أوجد معادلة المستوى العمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣، ٤)، (٤، ٥، ٨) من منتصفه.

الحل:

نفرض أن أ(٢، ٣، ٤) ، ب(٤، ٥، ٨)

متجه اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هو $\overrightarrow{أب}$ = ب - أ = (٢، ٢، ٤)

وهو العمودي على المستوى المطلوب أي أنه

ن = (٢، ٢، ٤) أي بالقسمة على ٢

ن = (١، ١، ٢)

نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي (٣، ٤، ٦)

معادلة المستوى ن · ر = ن · (٣، ٤، ٦)

(١، ١، ٢) · (س، ص، ع) = (١، ١، ٢) · (٣، ٤، ٦)

س + ص + ٢ع = ٣ + ٤ + ١٢

س + ص + ٢ع - ١٩ = صفر

س٩: مستقيم يمر بنقطة الأصل وجيوب تمام اتجاهه هي $\frac{٢}{٧}$، $\frac{-٣}{٧}$، $\frac{٦}{٧}$ ويقطع المستوى ٣س + ٥ص + ٢ع = -٦ في ب. أوجد طول $\overline{وب}$

الحل: معادلة المستقيم ر = ك(٢، -٣، ٦) كنقطة مستوى

∴ ٣ × ٢ك + ٥ × -٣ك + ٢ × ٦ك = -٦ ، ومنها ك = ٢

ب(-٤، ٦، -١٢) ∴ و ب = $\sqrt{١٦ + ٣٦ + ١٤٤}$ = ١٤ وحدة طول

س١: أوجد الصورة الإحداثية لمعادلة المستوى

(س، ص، ع) = (٢، ٣، ٥) + ك(−١، ٣، ٤) + ل(٦، ١، −٢)

الحل: حيث ك، ل بارامتران

المستوى يمر بالنقطة (٢، ٣، ٥) ولتكن أ

ه١ = (−١، ٣، ٤)، ه٢ = (٦، ١، −٢) متجهي اتجاه لمستقيمين متقاطعين داخله

∴ ن = ه١ × ه٢ =

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ -١ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ١ & -٢ \end{vmatrix}$$

ن = (−١٠، ٢٢، −١٩)

∴ معادلة المستوى ن . ر = ن . أ

(−١٠، ٢٢، −١٩) . (س، ص، ع) = (−١٠، ٢٢، −١٩) . (٢، ٣، ٥)

∴ −١٠س + ٢٢ص − ١٩ع = −٢٠ + ٦٦ − ٩٥

−١٠س + ٢٢ص − ١٩ع + ٤٩ = صفر

س٢: أوجد بعد النقطة (−١، ١، −٢) عن المستوى المار بالنقاط أ(١، −١، ١)، ب(−٢، ١، ٣)، ج(٤، −٥، −٢)

الحل: نفرض أن النقط هي أ، ب، ج على الترتيب

ن = أب × أج = (−٣، ٢، ٢) × (٣، −٤، −٣)

ن =

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ -٣ & ٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ & -٣ \end{vmatrix} = (٢، -٣، ٦)$$

∴ معادلة المستوى هي ن . ر = ن . أ ← ٢س − ٣ص + ٦ع = (٢، −٣، ٦) . (١، −١، ١)

٢س − ٣ص + ٦ع = ١١

$$\text{طول العمود} = \frac{|٢×(-١) + (-٣)×١ + ٦×(-٢) - ١١|}{\sqrt{٤ + ٩ + ٣٦}} = \frac{٢٨}{٧}$$

= ٤ وحدة طول

س١٢: أوجد معادلة خط تقاطع المستويين س + ٣ص − ٢ع = ١ ،
٢س + ص − ٣ع = ٥

الحل: س + ٣ص − ٢ع = ١ (١)
٢س + ص − ٣ع = ٥ (٢)
بضرب المعادلة الأولى × −٢ والجمع
∴ −٢س − ٦ص + ٤ع = −٢
٢س + ص − ٣ع = ٥ بالجمع

−٥ص + ع = ٣ ⟸ ع = ٣ + ٥ص

بضرب المعادلة ٢ × (−٣) والجمع
∴ س + ٣ص − ٢ع = ١ بالجمع
−٦س − ٣ص + ٩ع = −١٥

−٥س + ٧ع = −١٤ ⟸ ع = (٥س − ١٤) / ٧

∴ معادلة خط التقاطع هي: (٥س − ١٤) / ٧ = ٥ص + ٣ = ع

س١٣: أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين
٢س − ٣ص + ع − ٥ = ٠ ، س + ص + ٢ع + ٦ = ٠ ويمر بالنقطة
(−١، ٠، −٣)

الحل: معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين هي
٢س − ٣ص + ع − ٥ + ل(س + ص + ٢ع + ٦) = ٠
النقطة (−١، ٠، −٣) تحققه
∴ ٢×(−١) − ٣×٠ + (−٣) − ٥ + ل(−١ + ٠ − ٣ + ٦) = ٠
ومنها ل = ٥
∴ المعادلة هي ٢س − ٣ص + ع − ٥ + ٥س + ٥ص + ٥ع + ٣٠ = ٠
٧س + ٢ص + ٦ع + ٢٥ = ٠

س[14] إذا قطع المستوى $2س - ص - 2ع + 12 = 0$ الكرة $(س + 3)^2 + (ص + 2)^2 + (ع - 1)^2 = 15$ أوجد مساحة المقطع الناتج

الحل: المقطع الناتج هو سطح دائرة

من معادلة الكرة نق $= \sqrt{15}$ ومركزها $(-3 ، -2 ، 1)$



لإيجاد نصف قطر المقطع

نوجد طول العمود المرسوم من م على المستوى وليكن م د

$$م د = \frac{|2 \times (-3) + (-1) \times (-2) + (-2) \times 1 + 12|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

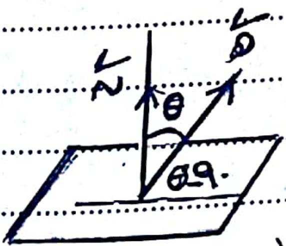
$$أ د = نق_{\text{للمقطع}} = \sqrt{(م أ)^2 - (م د)^2} = \sqrt{15 - 4} = \sqrt{11}$$

∴ مساحة المقطع الناتج $= \pi$ نق$^2 = \pi \times 11 = 11\pi$ وحدة مربعة

س[15] أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم

$$\frac{س - 3}{\sqrt{2}} = \frac{ص - 1}{1} = \frac{ع - 2}{1}$$ والمستوى $\sqrt{2}\,س - ص - ع + 5 = 0$

الحل: بملاحظة: الزاوية بين مستقيم ومستوى هي الزاوية بين المستقيم ومسقطه على المستوى



نوجد θ هي الزاوية بين ه ، ن حيث $\vec{ه} = (\sqrt{2} ، 1 ، -1)$

$\vec{ن} = (\sqrt{2} ، -1 ، -1)$

$$جتا \theta = \frac{|\vec{ن} \cdot \vec{ه}|}{\|\vec{ن}\| \, \|\vec{ه}\|}$$

$$جتا \theta = \frac{|(\sqrt{2} ، 1 ، -1) \cdot (\sqrt{2} ، -1 ، -1)|}{\sqrt{2 + 1 + 1} \cdot \sqrt{2 + 1 + 1}} = \frac{2 - 1 + 1}{4} = \frac{1}{2} \quad \theta = 60^\circ$$

∴ قياس الزاوية بين المستقيم على المستوى هي $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

١٦) إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات في النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب أوجد مساحة المثلث أ ب جـ ، حجم المجسم و أ ب جـ

الحل: معادلة المستوى بالقسمة على ١٢

$$\therefore \frac{س}{٤} + \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{٣} = ١$$

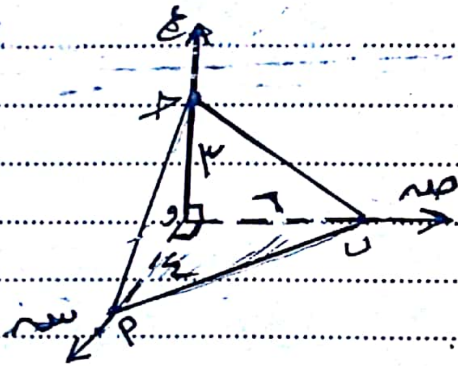
∴ أ(٤ ، ٠ ، ٠) ، ب(٠ ، ٦ ، ٠) ، جـ(٠ ، ٠ ، ٣)

مساحة المثلث أ ب جـ $= \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} \right\|$

$= \frac{1}{2} \left\| (-٤ ، ٦ ، ٠) \times (-٤ ، ٠ ، ٣) \right\|$

$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \overrightarrow{س}^{+} & \overrightarrow{ص}^{-} & \overrightarrow{ع}^{+} \\ -٤ & ٦ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left\| (١٨ ، ١٢ ، ٢٤) \right\|$

مساحة $= \frac{1}{2}\sqrt{(١٨)^2 + (١٢)^2 + (٢٤)^2} = ٣\sqrt{٢٩}$ وحدة مساحة



حجم المجسم و أ ب جـ (هرم ثلاثي)

الحجم $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times ٤ \times ٦) \times ٣$

$= ١٢$ وحدة مكعبة

س ١٧: أوجد مسقط النقطة أ(٠ ، ٩ ، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب(١ ، ٢ ، ٣) ، جـ(٧ ، -٢ ، ٥)

الحل: ∵ $\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} = (٦ ، -٤ ، ٢)$ ونأخذ اتجاهه $\overrightarrow{هـ} = (٣ ، -٢ ، ١)$

∴ معادلة المستقيم: $\overrightarrow{ر} = (١ ، ٢ ، ٣) + ك(٣ ، -٢ ، ١)$

نفرض أن نقطة المسقط د(١+٣ك ، ٢-٢ك ، ٣+ك) ∈ ل

$\overrightarrow{أد} = \overrightarrow{د} - \overrightarrow{أ} = (١+٣ك ، -٧-٢ك ، -٣+ك)$

∵ $\overrightarrow{أد} \perp \overrightarrow{هـ}$ ∴ $\overrightarrow{أد} \cdot \overrightarrow{هـ} =$ صفر ∴ ٣ + ٩ك + ١٤ + ٤ك - ٣ + ك = صفر ∴ ك = -١

∴ النقطة = (-٢ ، ٤ ، ٢)

س١٨: أوجد مسقط النقطة (١، ٢، ٣) على المستوى س + ٢ص + ٤ع = ٩

الحل: ∵ $\overrightarrow{ن}$ = (١، ٢، ٤) عمودي على المستوى

∴ $\overrightarrow{ن}$ اتجاه المستقيم أم

∴ معادلة أم : $\overrightarrow{ر}$ = (١، ٢، ٣) + ك(١، ٢، ٤)

∴ م (١ + ك ، ٢ + ٢ك ، ٣ + ٤ك) ∈ المستوى

أ(١، ٢، ٣)

ن(١، ٢، ٤)

م

∴ تحقق معادلة المستوى

∴ ١ + ك + ٢(٢ + ٢ك) + ٤(٣ + ٤ك) = ٩

∴ ١ + ك + ٤ + ٤ك + ١٢ + ١٦ك = ٩ وبذلك ك = ٢

∴ المسقط م (٣، ٦، ١١)

س١٩: أثبت أن معادلة المستوى الذي يقطع محاور الإحداثيات في النقط أ، ب، جـ وطابه (م، ن، هـ) هي نقطة تقاطع متوسطات مثلث أ ب جـ هي

$$\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{هـ} = ٣$$

الحل: نفرض أن أ(س١، ٠، ٠)، ب(٠، ص١، ٠)، جـ(٠، ٠، ع١)

∴ نقطة تقاطع المتوسطات هي $\left(\frac{س_١}{٣}، \frac{ص_١}{٣}، \frac{ع_١}{٣}\right)$

∴ م = $\frac{س_١}{٣}$ ، ن = $\frac{ص_١}{٣}$ ، هـ = $\frac{ع_١}{٣}$

س١ = ٣م ، ص١ = ٣ن ∴ ع١ = ٣هـ

∴ معادلة المستوى هي

$$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$$

∴ $\frac{س}{٣م} + \frac{ص}{٣ن} + \frac{ع}{٣هـ} = ١$ بالضرب × ٣

∴ $\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{هـ} = ٣$ #

س٢٠: أثبت أن المستويين ٢س + ص + ٢ع = ٨ ، ٤س + ٢ص + ٤ع + ٥ = ٠ متوازيان وأوجد البعد بينهما

الحل: ∵ $\overrightarrow{ن_١}$ = (٢، ١، ٢) ، $\overrightarrow{ن_٢}$ = (٤، ٢، ٤)

∵ $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤}$ ∴ $\overrightarrow{ن_١} \parallel \overrightarrow{ن_٢}$

∴ المستويان متوازيان. نوجد نقطة على الأول ولتكن (٤، ٠، ٠) وذلك بوضع ص = ٠ ، ع = ٠

∴ طول العمود = البعد بينهما = $\frac{|٤ \times ٤ + ٠ + ٠ + ٥|}{\sqrt{١٦ + ٤ + ١٦}} = \frac{٢١}{٦} = ٣٫٥$ وحدة طول

أجب عن الأسئلة التالية :

① من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥ كم عدداً زوجياً أكبر من ٣٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام مع الإحلال

أ) ٣٠ ب) ٢٥٠ ج) ١١١ د) ١٥٢٠

② إذا كان $^{ن}ق_{٦}$: $^{ن}ق_{٥}$ = ١ : ٣ فإن $\lfloor$ن - ٣ = ...

أ) ٢٤ ب) ١١ ج) ١٢٠ د) ٦

③ الحد الأوسط في مفكوك $(٢س + \frac{١}{٢س})^{١٢}$ يساوي ......

أ) $^{١٢}ق_{٦}$ $س^{-٦}$ ب) $^{١٢}ق_{٦}$ $س^{٦}$ ج) $^{١٢}ق_{٧}$ $س^{٥}$ د) $^{١٢}ق_{٦}$

④ إذا كان ع = ٦ت (جا٣٠ + ت جتا٣٠) فإن السعة الأساسية للعدد ع = ...

أ) ٣٠° ب) ٦٠° ج) ٩٠° د) ١٢٠°

(٥) إذا كان ع = ٢ + ٢$\sqrt{3}$ ت فإن الصورة الأسية للعدد ع = ...

أ) ٤ هـ$^{-\frac{\pi}{3}ت}$ ب) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{3}ت}$ ج) ٤ هـ$^{-\frac{\pi}{6}ت}$ د) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{6}ت}$

(٦) إذا كانت ١، ω، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن

١ + ω + ω^2 + ω^3 + ... + ω^{100} = ...

أ) صفر ب) ١ ج) ω د) $-\omega^2$

(٧) إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها (−٣، ٢، ٤)، (−٥، ٢، ٨) هي ....

أ) (−٢، ٢، ٤) ب) ($-\frac{5}{2}$، ٥، $\frac{5}{2}$) ج) ($-\frac{5}{2}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{2}{3}$) د) (−٤، ٢، ٦)

(٨) إذا كانت س^2 + ص^2 + ع^2 + ٤س − ٦ص + ٨ع + ٤ = صفر هي معادلة كرة فإن طول قطر الكرة = ...

أ) ٥ ب) ١٠ ج) ١٥ د) ٢٠

Scanned by CamScanner

(٩) جيوب تمام زوايا الإتجاه لمتجه $\overline{أ}$ = (−٢، ١، ٢) هي ......

أ) (−٢، ١، ٢)   ب) ($-\frac{٢}{٣}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{٢}{٣}$)   جـ) ($-\frac{٥}{٢}$، ٥، $\frac{٥}{٣}$)   د) (−١، ١، ١)

(١٠) إذا كانت (٤٥°، ٤٥°، θ°) هي زوايا الإتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ = ...

أ) ٤٥°   ب) ٩٠°   جـ) ١٣٥°   د) ٦٠°

(١١) إذا كانت $\overline{أ}$ = ٢س + ٣ص − ع ، $\overline{ب}$ = ٤س − ص فإن $\overline{أ}$. $\overline{ب}$ = ...

أ) ٥   ب) ٤   جـ) ٣   د) ٨

(١٢) إذا كانت جيوب تمام مستقيمين هي ($\frac{٢}{٣}$، $-\frac{٢}{٣}$، $\frac{١}{٣}$)، ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$، ٠) فإن قياس الزاوية بين المستقيمين = ...

أ) ٦٠°   ب) ٣٠°   جـ) ٩٠°   د) ١٢٠°

(١٣) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ يمثلان ضلعان متجاورين حيث $\overline{أ}$ = (٣، ٦، ٣) ، $\overline{ب}$ = (−٦، −٢، −٤)

(١٤) اثبت أن مفكوك $\left(س^{2} + \frac{2}{س^{4}}\right)^{11}$ لا يحتوي على حد خالي من س

---

(١٥) حل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(١٦) اجب عن احدى الفقرتين:

أ) اوجد مجموعة حل المعادلة $ع^3 = -8ت$ على الصورة المثلثية

(ب) اذا كان $ع = \frac{1}{2} (1 + ت)$ اوجد الجذور التربيعية له في الصورة المثلثية

(١٧) اوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $2س + ص - 4ع = 0$ والواقع على بعد ٢٫١٧ وحدة طول من النقطة (١، ٢، ١)

(١٨) اجب عن احدى الفقرتين:

أ) اذا كان المستقيمان:

ل١: ر = (٢، ٣، -٤) + ك (٢، ٣، م)

ل٢: (س - ٥)/ب = (ص + ٤)/٦ ، (ع - ٤)/٢

متوازيان اوجد قيمة م ، ب

ب) اثبت ان المستقيمان:

ل١: ر = (١، ٢، ٤) + ك١ (٤، -٢، ٢)

ل٢: س = ١ - ٦ ك٢ ، ص = ١ + ١٠ ك٢ ، ع = ١ + ٣٣ ك٢

متعامدان

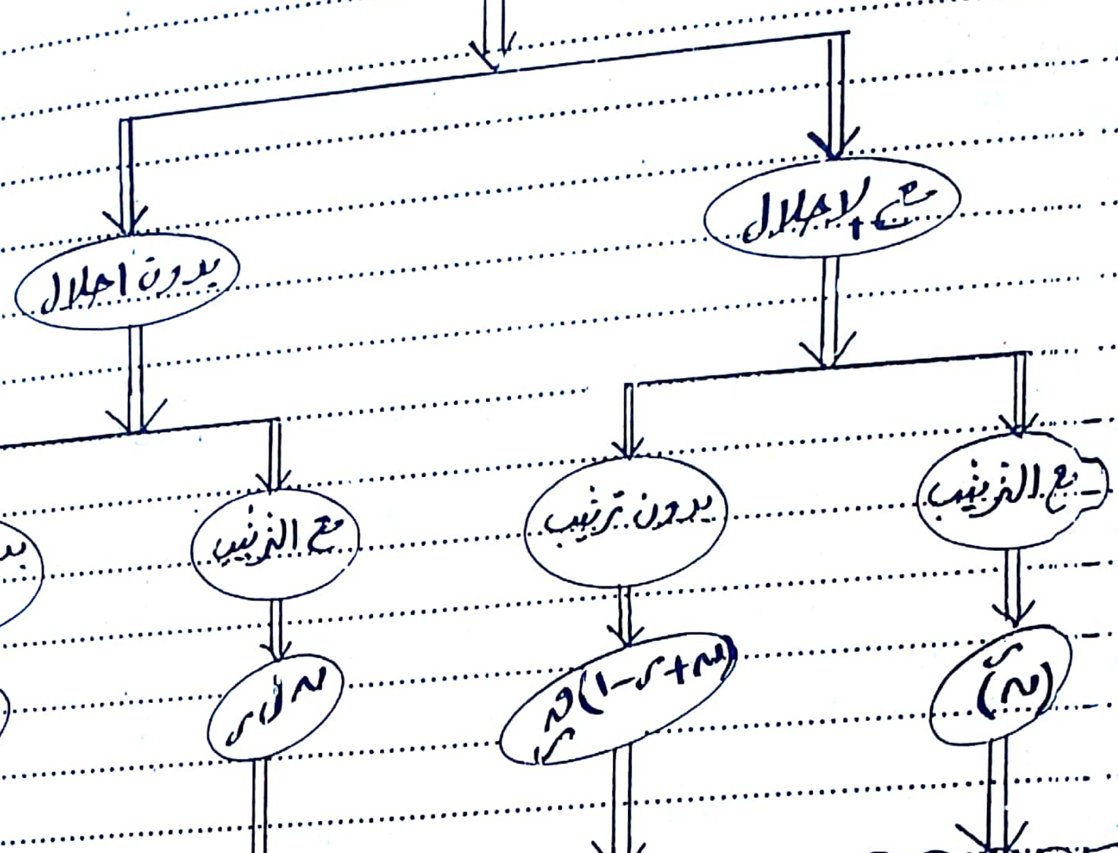
(١٩) بدون فك المحدد اثبت أن:

٢س	٣س	٣س
١	ب	م
م+ب	م+١	ب+١

= صفر

عدد طرق الاختيار (طرق العد)

يفترض أن لدينا (ن) من الأشياء ويراد اختيار (ر) منها



يفترض أن س = {أ، ب، ج}
عدد طرق اختيار ثنائية مرتبة من س مع الإحلال هو $٣^٢ = ٩$
∴ عدد طرق اختيار ٣ مع الإحلال هو

عدد طرق توزيع ٣ كتب على ٤ أرفف أو توزيع ٣ كرات على اربع صناديق هو (٤+٣−١) ق ٣ = ٦ ق ٣ = ٢٠

يفترض أن س = {أ، ب، ج}
عدد طرق اختيار ثنائية مختلفة هو ٣ ل ٢ = ٦

يراد تكوين لجنة من ٣ أشخاص من بين ٦ أشخاص فإن عدد الطرق هو ٦ ق ٣ = ٢٠

ملاحظات

(1) إذا كان لدينا مضلع له (ن) ضلعاً فإن

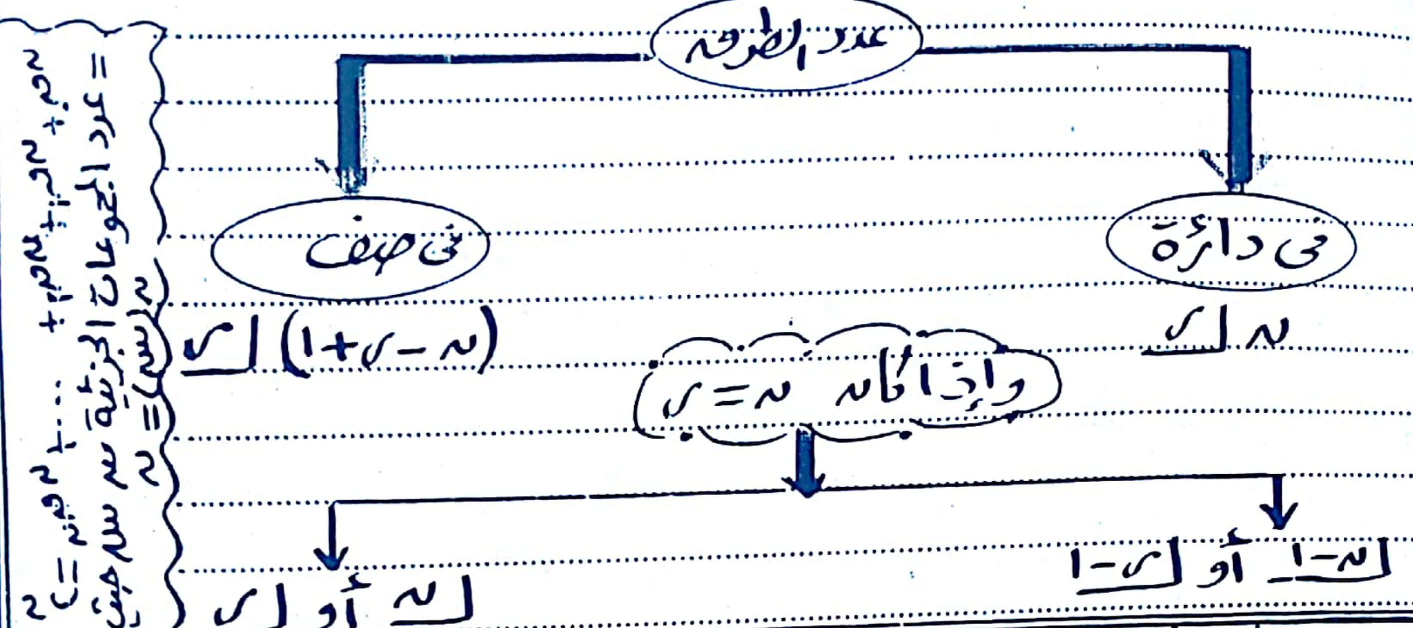
أ) عدد القطع المستقيمة التي يحتويها (يمكن تكوينها) = عدد طرق اختيار (2) من (ن) بدون احلال وبدون ترتيب = $^{ن}ق_{2}$

ب) عدد القطع المستقيمة الموجهة = عدد طرق اختيار (2) من (ن) = $^{ن}ل_{2}$ لماذا؟

جـ) عدد أقطاره = عدد القطع التي يحتويها − عدد أضلاعه = $^{ن}ق_{2} - ن$

د) عدد المثلثات التي يمكن تكوينها من رؤوسه = $^{ن}ق_{3}$

(2) إذا كان لدينا (ن) من الأماكن، (ر) من الأشخاص فإن
عدد الطرق التي يمكن لهؤلاء الأشخاص الجلوس في هذه الأماكن



$^{ن}ق_{0} + {^{ن}ق_{1}} + {^{ن}ق_{2}} + \dots + {^{ن}ق_{ن}} = 2^{ن}$ = عدد المجموعات الجزئية من س حيث ن(س) = ن

قوانين التباديل

$^{ن}ل_{0} = 1$ ، $^{ن}ل_{1} = ن$

1) $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-1)(ن-2)\dots(ن-ر+1)$

2) $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن} = ن(ن-1)\dots \times 3 \times 2 \times 1$

3) $\underline{|ن} = ن\,\underline{|ن-1} = ن(ن-1)\,\underline{|ن-2}$

4) $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$

5) بفرض أن س > ص ∴ $\dfrac{\underline{|س}}{\underline{|ص}} = {^{س}ل_{س-ص}}$

6) بفرض أن س < ص ∴ $\dfrac{\underline{|س}}{\underline{|ص}} = 1 \div {^{ص}ل_{ص-س}}$

7) $\underline{|2ن} = 2^{ن}\,\underline{|ن}\,\left(1 \times 3 \times 5 \times \dots (2ن-1)\right)$

8) $\underline{|1} = 1$ ، $\underline{|0} = 1$ ∴ $\underline{|س} = 1$ ∴ س ∈ {0، 1}

قوانين التوافيق

$^{ن}ق_{0} = 1$ ، $^{ن}ق_{1} = ن$

1) $^{ن}ق_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\,.\,\underline{|ن-ر}} = \dfrac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$

2) $^{ن}ق_{ر} = {^{ن}ق_{ن-ر}}$ مثلاً $^{ن+1}ق_{ن-1} = {^{ن+1}ق_{2}}$

3) إذا كان $^{ن}ق_{س} = {^{ن}ق_{ص}}$ فإن
إما س = ص أو س + ص = ن

4) $^{ن}ق_{ر} + {^{ن}ق_{ر+1}} = {^{ن+1}ق_{ر+1}}$

5) $\dfrac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-1}} = \dfrac{ن-ر+1}{ر}$

6) $^{ن}ق_{ن} = 1$

خطوات ايجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ فى مفكوك $(أ+ب)^{ن}$

١) نفرض ان الحد المشتمل على $س^{ك}$ هو $ح_{ر+١}$ ثم نوجد $ح_{ر+١}$

٢) نفصل المعاملات عن السينات عن طريق وضع $س=١$ لايجاد المعامل

ثم نكتب $ح_{ر+١}$ = المعامل × $(س)^{\text{مجموع الاس}}$ ← ك

٣) نساوى مجموع الاس بالعدد (ك) ومن ذلك نوجد (ر) ثم نقوم بالتعويض فى I لايجاد الحد أو المعامل حسب المطلوب

٤) إذا كان المطلوب ايجاد الحد الخالى من س نتبع نفس الخطوات ونساوى مجموع الاس بالعدد صفر بدلا من ك

٥) إذا كان المطلوب اثبات انه لا يوجد حد يشتمل على $س^{ك}$ نتبع نفس الخطوات نجد أن (ر) إما كسر أو عدد سالب أو $> ن$ ∴ لا يوجد

٦) إذا كانت ن مكرراً للعدد ٧ مثلا ∴ $ن \in \{٧، ١٤، ٢١، ٢٨، \ldots\}$

ملاحظات هامة يجب مراعاتها عند حل المسائل

١) إذا ذكر بالمسألة انه فى مفكوك $(أ+س)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية لابد من اعادة ترتيب ذى الحدين بحيث يصبح على الشكل $(س+أ)^{ن}$ قبل البدء فى الحل

٢) ايجاد $ح_{٥}$ من النهاية فى مفكوك $(أ+ب)^{ن}$ يكون الاسهل ايجاد $ح_{٥}$ فى $(ب+أ)^{ن}$ من البداية

٣) خد بالك $\frac{ح_{٧}}{ح_{٥}} = \frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} \times \frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{ن-٦+١}{٦} \times \frac{ن-٥+١}{٥} \times \left(\frac{ب}{أ}\right)^{٢}$

٤) تذكر أن الحدين الاوسطان متساويين

٥) إذا كان $ح_{٧} = ح_{٦}$ فإن $\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = ١$

٦) عند حل معادلتين فى مجهولين نفصل القسمة واحيانا قد نلجأ الى تربيع احدى المعادلتين قبل اجراء القسمة

٧) الحد العام فى $(أ+ب)^{ن}$ = $ن ق_{ر} \cdot أ^{ن-ر} \cdot ب^{ر}$

٨) لايجاد أكبر معامل نستخدم العلاقة $\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} \geq ١$

٩) إذا كان المفكوك على الشكل $(أ+ب)^{٦} = ٦٤$ ∴ $أ+ب = \pm ٢$

١٠) إذا كان المفكوك على الشكل $\left(س - \frac{١}{س}\right)^{ن}$ فإن الحد الاوسط خالياً من س
ن زوجى

نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

$$(أ \pm ب)^{ن} = أ^{ن} \pm {}^{ن}ق_{1}\, أ^{ن-1}\, ب + {}^{ن}ق_{2}\, أ^{ن-2}\, ب^{2} \pm \dots + (-ب)^{ن}$$

ملاحظات حول المفكوك

١) قوى (أ) تنازلية بينما قوى (ب) تصاعدية بحيث يكون مجموع أسس أ ، ب في أي حد يساوي (ن)

٢) عدد حدود الطرف الأيسر (المفكوك) أكبر من الأس بمقدار (١)

٣) الحد العام $= ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر} \cdot ب^{ر}$

٤) $(أ+ب)^{ن} + (أ-ب)^{ن} = 2[ح_{1} + ح_{3} + ح_{5} + \dots]$ = ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة

٥) $(أ+ب)^{ن} - (أ-ب)^{ن} = 2[ح_{2} + ح_{4} + ح_{6} + \dots]$ = ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة

٦) **حالات خاصة**

أ) $(1+س)^{ن} = 1 + {}^{ن}ق_{1}\, س + {}^{ن}ق_{2}\, س^{2} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}\, س^{ن}$

$ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ر}$ ∴ معامل $س^{ك}$ هو ${}^{ن}ق_{ك}$

ب) $(1+أس)^{ن} = 1 + {}^{ن}ق_{1}(أس) + {}^{ن}ق_{2}(أس)^{2} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}(أس)^{ن}$

$ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}(أس)^{ر}$ ∴ معامل $س^{ك}$ هو ${}^{ن}ق_{ك}\, أ^{ك}$

الحد الأوسط والحدان الأوسطان في مفكوك $(أ+ب)^{ن}$

i) إذا كانت ن زوجية ∴ يوجد حد أوسط وحيد رتبته $\left(\frac{ن}{2} + 1\right)$

ii) إذا كانت ن فردية ∴ يوجد حدان أوسطان رتبة الأول $\frac{ن+1}{2}$ ، رتبة الثاني $\frac{ن+1}{2} + 1$

النسبة بين حدين متتاليين $\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{الثاني}{الأول}$

وفي حالة النسبة بين المعاملين تضع معامل الثاني / معامل الأول

الصورة الجبرية للعدد المركب

ع = س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح

(س: الجزء الحقيقي ، ص: الجزء التخيلي)

ك = { س + ص ت : س ، ص ∈ ح ، $ت^2 = -1$ } لاحظ أن ح ⊂ ك

بعض خواص الأعداد المركبة:

∀ $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك حيث $ع_1 = س_1 + ص_1 ت$ ، $ع_2 = س_2 + ص_2 ت$

١. $ع_1 = ع_2$ ∴ $س_1 = س_2$ ، $ص_1 = ص_2$

٢. إذا كان $ع_1$ = صفر ∴ $س_1$ = صفر ، $ص_1$ = صفر والعكس صحيح

٣. إذا كان $ص_1$ = صفر يسمى $ع_1$ عدد حقيقي بحت وإذا كان س = صفر كان تخيلي بحت

العمليات على ك

أولا الجمع: $ع_1 \pm ع_2 = (س_1 \pm س_2) + (ص_1 \pm ص_2)ت$

ثانيا الضرب: $ع_1 . ع_2 = (س_1 + ص_1 ت)(س_2 + ص_2 ت)$

$= (س_1 س_2 - ص_1 ص_2) + ت(س_1 ص_2 + س_2 ص_1)$

خلي بالك: إذا كان ع = س + ص ت ∴ $ع^{-1} = \frac{1}{ع} = \frac{س}{س^2 + ص^2} - \frac{ص}{س^2 + ص^2} ت$

مرافق العدد المركب:

∀ ع = س + ص ت يكون $\bar{ع}$ = س − ص ت

بعض خواص المرافق:

* $ع + \bar{ع} = 2س$ * $ع - \bar{ع} = 2ص ت$

* $ع . \bar{ع} = س^2 + ص^2$

* $\overline{(ع_1 \pm ع_2)} = \bar{ع}_1 \pm \bar{ع}_2$ * $\overline{(ع_1 . ع_2)} = \bar{ع}_1 . \bar{ع}_2$ * $\overline{\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)} = \frac{\bar{ع}_1}{\bar{ع}_2}$

خلي بالك: إذا كان $ع = \bar{ع}$ لابد أن ع ∈ ح مثل $\bar{9} = 9$ ، $\overline{-3} = -3$

قاعدة: لدى معادلة ذات معاملات حقيقية إذا كان أحد جذورها عدد مركب ع لابد أن $\bar{ع}$ جذر آخر لها.

قوى العدد ت:

$ت = \sqrt{-1}$ ، $ت^2 = -1$

$ت^n$:
- ٢٥ ← ت (١)
- ٣٠ ← −١ (٢)
- ٢٧٥ ← −ت (٣)
- صفر ← ١ (صفر)

[illegible]

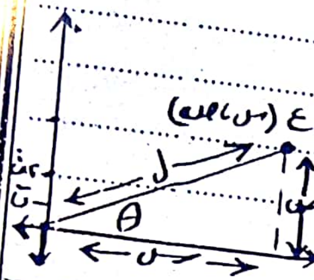
خلي بالك:

* $ت^{-1} = \frac{1}{ت} = -ت$ ، $ت^{-3} = \frac{1}{ت^3} = ت$

* $(1 + ت)^2 = 2ت$ ، $(1 - ت)^2 = -2ت$

* $(1 + ت)^{12} = [(1 + ت)^2]^6 = (2ت)^6 = 64 ت^6 = -64$

القياس والسعة للعدد المركب والصورة المثلثية



$|ع| = ل = \sqrt{س^2 + ص^2}$ = بعده عن نقطة الأصل

سعة العدد المركب = سع (ع) = $طا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right)$

$ع = (س + ص ت) = (ل ، θ) = \left(\sqrt{س^2+ص^2} ، طا^{-1}\frac{ص}{س}\right)$

مادام θ سعة أساسية للعدد المركب $θ \in]-π ، π]$

ويقال أنه θ سعة أساسية للعدد المركب ويلاحظ أن قيمة θ تتحدد حسب إشارتي س ، ص أي حسب الربع الذي تقع فيه النقطة التي تمثل العدد المركب في شكل ارجاند كما يلي

١) (+،+) أي أن ع ∈ الربع الأول ∴ θ (موجبة) = $طا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right)$ ناتج الآلة

٢) (-،+) أي أن ع ∈ الربع الثاني ∴ θ (موجبة) = $π + طا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right)$ = ١٨٠ + الآلة

٣) (-،-) أي أن ع ∈ الربع الثالث ∴ θ (سالبة) = $-π + طا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right)$ = -١٨٠ + الآلة

٤) (+،-) أي أن ع ∈ الربع الثالث ∴ θ (سالبة) = $طا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right)$ = ناتج الآلة

٥) (+،٠) ∴ θ = صفر ∴ أي عدد حقيقي موجب سعته صفر

٦) (-،٠) ∴ θ = π ∴ أي عدد حقيقي سالب سعته ١٨٠°

٧) (٠،+) ∴ θ = $\frac{π}{2}$ ∴ أي عدد تخيلي موجب ∴ سعته ٩٠°

٩) (٠،-) ∴ θ = $-\frac{π}{2}$ ∴ أي عدد تخيلي سالب ∴ سعته -٩٠°

خواص القياس والسعة

١) |ع| ≥ صفر ويكون |ع| = صفر عندما ع = صفر

٢) $|ع| = |\bar{ع}| = |-ع| = |-\bar{ع}|$ ، $ع \bar{ع} = |ع|^2 = |\bar{ع}|^2$

٣) إذا كانت θ هي السعة الأساسية للعدد المركب فإن $θ + 2نπ$ سعات مختلفة لـ ع

٤) ضرب العدد المركب × عدد حقيقي موجب لا يغير من سعة العدد المركب

مثلا إذا كانت سع (ع) = θ فإن سع (م ع) = θ ∀ م > صفر

كيفية وضع العدد المركب في صورته المثلثية القياسية

Tomake ISSO

١) إذا كان ل سالبا نجعله موجبا مثال −٥ [جتا θ + ت جا θ] = ٥ [− جتا θ − ت جا θ]

٢) إذا لم تكن θ المعطاة ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فيجب جعلها كذلك مثال

ع = ٦ [جا $\frac{٤\pi}{٢}$ − ت جتا $\frac{٤\pi}{٢}$] = ٦ [− جا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جتا $\frac{\pi}{٢}$]

ليه بقى؟ . جا $\frac{٤\pi}{٢}$ = جا (١٨٠ + $\frac{\pi}{٢}$) = − جا $\frac{\pi}{٢}$

جتا $\frac{٤\pi}{٢}$ = جتا (١٨٠ + $\frac{\pi}{٢}$) = − جتا $\frac{\pi}{٢}$

٣) تحدد الربع الذي قد يقع فيه العدد المركب (تحديد اعتباري) طبقا لإشارتي (س، ص) ثم نكتب العدد في صورته السليمة مع ملاحظة أن جتا ($\frac{\pi}{٢}$ − θ) = جا θ ، جا ($\frac{\pi}{٢}$ − θ) = جتا θ

١ (+ ، +)	٢ (− ، +)	٣ (− ، −)	٤ (+ ، −)
جتا θ + ت جا θ ← θ	− جتا θ + ت جا θ ← π − θ	− جتا θ − ت جا θ ← −π + θ	جتا θ − ت جا θ ← −θ
جا θ + ت جتا θ ← $\frac{\pi}{٢}$ − θ	− جا θ − ت جتا θ ← $\frac{\pi}{٢}$ + θ	− جا θ − ت جتا θ ← −$\frac{\pi}{٢}$ − θ	جا θ − ت جتا θ ← $\frac{\pi}{٢}$ + θ

ملحوظ: إذا كانت θ معطاة فيمكنه إيجاد الصورة الجبرية ثم إيجاد الصورة المثلثية

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية القياسية ISSO

الضرب: ع١ . ع٢ = ل١ . ل٢ [جتا (θ_1 + θ_2) + ت جا (θ_1 + θ_2)] نضرب المقاييس ونجمع السعتين

تعميم: ع١ . ع٢ ..... عم = (ل١ . ل٢ . ل٣ ... لم) . [جتا (θ_1 + θ_2 + ...) + ت جا (θ_1 + θ_2 + ...)]

حالة خاصة: عم = {ل [جتا θ + ت جا θ]}م = لم . [جتا (مθ) + ت جا (مθ)]

القسمة: $\frac{ع_1}{ع_2}$ = $\frac{ل_1}{ل_2}$ [جتا (θ_1 − θ_2) + ت جا (θ_1 − θ_2)] نقسم المقاييس ونطرح السعتين

ملاحظات: إذا كان المطلوب السعة الأساسية للعدد ع١ . ع٢ ، أو ع١ ÷ ع٢ فلابد أن أن نجعل (θ_1 + θ_2) أو (θ_1 − θ_2) ∈]−π ، π] عن طريق إضافة ٢نπ

مثلا $\frac{٦ [جتا (−٩٠) + ت جا (−٩٠)]}{٣ [جتا (١٨٠) + ت جا (١٨٠)]}$ = ٢ [جتا (−٢٧٠) + ت جا (−٢٧٠)] = سنضيف ٣٦٠

= ٢ [جتا ٩٠ + ت جا ٩٠]

الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر) والعمليات عليها

الصورة الأسية للعدد المركب

$ع = (س + ص ت) = ل(\theta) = ل[جتا\theta + ت جا\theta] = ل هـ^{\theta ت}$ حيث θ بالدائري

$ع_١ \cdot ع_٢ = ل_١ \cdot ل_٢ \cdot هـ^{(\theta_١ + \theta_٢)ت}$ ، ② $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} \cdot هـ^{(\theta_١ - \theta_٢)ت}$

① $ع = ل[جتا\theta + ت جا\theta] = ل[جتا(\theta + ٢ن\pi) + ت جا(\theta + ٢ن\pi)]$

نظرية ديموافر: نعلم أن

$\sqrt[ن]{ع} = ع^{\frac{١}{ن}} = ل^{\frac{١}{ن}}\left[جتا\left(\frac{\theta + ٢ن\pi}{ن}\right) + ت جا\left(\frac{\theta + ٢ن\pi}{ن}\right)\right]$

وهو مقدار متعدد القيم نحصل عليها بوضع ن = ٠ ، ١ ، -١ ، ٢ ، -٢ ، ... عندما θ سالبة

ن = ٠ ، ١ ، -١ ، ٢ ، ... ن زوجية

الجذور النونية للعدد المركب

$\sqrt[ن]{ع}$ ، ن ∈ ص$^+$ يكون

الجذور النونية للعدد ع

$\sqrt[ن]{ع} = ع^{\frac{١}{ن}}$ ∈ ك حيث $ع^{\frac{١}{ن}}$ تسمى الجذور النونية للعدد ع

نحصل عليها بتطبيق نظرية ديموافر وهذه الجذور تمثل برؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه (ن) وتقع على دائرة مركزها نقطة الأصل

وطول نصف قطرها = $\sqrt[ن]{ل}$ حيث ل = |ع|

حالة خاصة: إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب ← ١ جبرية - ٢ ديموافر

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

١ $\quad$ ω $\quad$ $ω^٢$

جتا٠ + ت جا٠ $\quad$ جتا١٢٠ + ت جا١٢٠ $\quad$ $هـ^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$

① $١ + ω + ω^٢ = صفر$ ∴ $١ + ω = -ω^٢$ ، $١ + ω^٢ = -ω$ ، $ω + ω^٢ = -١$

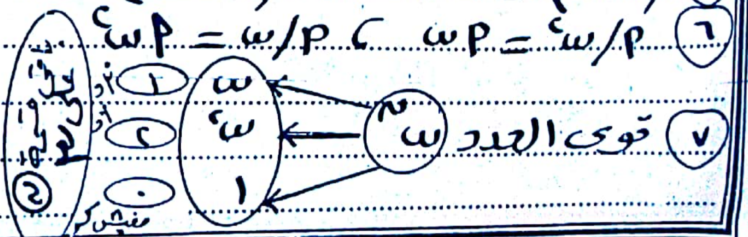
② $\bar{ω} = ω^٢$ ، $\bar{ω^٢} = ω$ ③ مربع أحدهما يعطي الآخر ومكعب أيهما يعطي ١

④ $ω - ω^٢ = \pm\sqrt{٣}ت$ ، $ω^٢ - ω = \pm\sqrt{٣}ت$ ولكن $(ω - ω^٢) \neq (ω^٢ - ω)$

⑤ $(١ - ω)^٢ = -٣ω$ ، $(١ - ω^٢)^٢ = -٣ω^٢$

⑥ $أ/ω^٢ = أω$ ، $أ/ω = أω^٢$

⑦ قوى العدد $(ω)^ن$



خواص المحددات

أولاً: قيمة المحدد لا تتغير فى الحالات الآتية:

1. فك المحدد باستخدام عناصر أى صف أو أى عمود
2. تبديل صفوفه بأعمدته بنفس الترتيب $\Delta^{مد} = \Delta$
3. إضافة مضاعفات أى صف [أى عمود] إلى صف أو عمود آخر

ثانياً: قيمة المحدد = صفر فى الحالات الآتية

1. جميع عناصر أحد صفوفه أو أحد أعمدته أصفار
2. أحد صفوفه (احدأعمدته) مضاعف لصف أو عمود آخر [أو يساويه]

ثالثاً: قيمة المحدد = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى إذا كان المحدد فى الصورة المثلثية السفلى أو العليا

$\begin{vmatrix} أ & \cdot & \cdot \\ ب & د & \cdot \\ جـ & هـ & و \end{vmatrix} = أ\,د\,و$

رابعاً: أى محدد يمكن كتابته كمجموع محددين باستخدام اى صف (عمود) والعكس صحيح يمكن جمع محددين بشرط

1. لهما نفس الدرجة
2. متشابهان فى جميع الصفوف (الاعمدة) الا واحد هو الذى سيتم الجمع فيه

خامساً: اى محدد = عدد × محدد آخر فى الحالات الآتية

1. إذا وُجد عامل مشترك فى احد الصفوف (احد الاعمدة) فإنه يكتب خارج المحدد والعكس عند ضرب عدد × محدد فإنه يُضرب فى أى صف أو أى عمود
2. إذا بدلنا صفين أو عمودين فإن المحدد الناتج = −1 × المحدد الاصلى

وعموما إذا كان عدد التبديلات (i) فردى ∴ المحدد الناتج = −1 × الاصلى

(ii) زوجى ∴ المحدد الناتج = الاصلى

سادساً: إذا ضربنا عناصر اى صف فى مرافقات عناصر اى صف آخر ثم جمعنا النواتج فإن ناتج الجمع = صفر

المصفوفات المصفوفة هى جدولة لبعض العناصر فى صفوف وأعمدة
توضع بين قوسين على الشكل [ ] أو ( )

نظم المصفوفة هو عدد الصفوف والأعمدة فى المصفوفة
مثلا المصفوفة على النظم ٣×٢ يقصد بذلك أنه
بها ٣ صفوف و عمودين

بعض المصفوفات الخاصة ① الصف ② العمود ③ المستطيلة
④ المربعة ⑤ الصفرية ⑥ القطرية ⑦ المثلثية ⑧ الوحدة I

تساوى مصفوفتين ① لهما نفس النظم ② العناصر المتناظرة متساوية

ضرب عدد × مصفوفة ك . س يضرب العدد ك فى جميع عناصر س
والعكس عند أخذ عامل مشترك يؤخذ من جميع عناصرها

مدور المصفوفة بفرض أن $س_{٣×ن}$ فإن $س^{مد}_{ن×٣}$ ويتم ذلك
بجعل ص١ عمود أول ، ص٢ عمود ثانى وهكذا

قاعدة $(س + ص)^{مد} = س^{مد} + ص^{مد}$ ، $(س^{مد})^{مد} = س$

ضرب المصفوفات يقال أن س ، ص قابلتان للضرب على الشكل
$س_{٣×ن} \cdot ص_{ن×ك} = ع_{٣×ك}$

ملاحظة الضرب ليس ابدالى دائما $أ . ب \neq ب . أ$ دائما
* $(أ . ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$
* $(أ . ب . جـ .... ى)^{مد} = (ى^{مد} ...... جـ^{مد} ب^{مد} أ^{مد})$
* $س . I = I . س = س$

* إذا كانت أ مربعة وكانت $أ = أ^{مد}$ قيل أنها متماثلة
وكانت $أ = -أ^{مد}$ " " شبه متماثلة

مصفوفة العوامل المرافقة - المصفوفة الملحقة - م، $س^{مل}$

العامل المرافق للعنصر $أ_{ص ع}$ = $(-1)^{ص+ع}$ × قيمة المحدد المصاحب

ويعني هنا بأنه م

هي المصفوفة التي نحصل عليها من إيجاد العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة س أما $س^{مل}$ نحصل عليها من تدوير المصفوفة م أي أن $س^{مل} = (م)^{مد}$

المعكوس الضربي للمصفوفة

إذا كانت أ مربعة وكان |أ| ≠ ٠ عندئذ نقول أن أ غير منفردة

وأحيانا يقال غير شاذة وهذا يعني أنه يمكن إيجاد معكوس ضربي لها أي أن $أ^{-1}$ يكون معرفا ويكون

$$أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} أ^{مل}$$

ملاحظة: إذا كان |أ| = ٠ ∴ $أ^{-1}$ غير معرف عندئذ نقول أن أ مصفوفة منفردة أو شاذة.

بعض خواص المعكوس الضربي

* $(أ^{-1})^{-1} = أ$
* $(أ^{2})^{-1} = (أ^{-1})^{2}$
* $(أ . ب)^{-1} = ب^{-1} . أ^{-1}$
* $(أ . ب . جـ .... ى)^{-1} = ى^{-1} .... جـ^{-1} . ب^{-1} . أ^{-1}$

خطوات إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة

(١) نوجد |أ| بالطبع ≠ صفر (٢) نوجد مصفوفة العوامل المرافقة ورمزها م أو أ

(٣) نوجد $أ^{مل}$ بتدوير أ أو م (٤) نوجد $أ^{-1}$ من العلاقة $\frac{1}{|أ|} أ^{مل}$

ملاحظة: إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & و \end{pmatrix}$ فإن $أ^{مل} = \begin{pmatrix} و & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$ أي نبدل وضع عنصري القطر الرئيسي ونغير إشارتي عنصري القطر غير الرئيسي فإذا كان |أ| = ك مثلا فإن

$$أ^{-1} = \frac{1}{ك} \begin{pmatrix} و & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$$

حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة

في هذه الحالة لابد أن عدد المعادلات = عدد المجاهيل

الخطوات

(١) نضع المعادلات على الصورة المصفوفية أ س = ب
حيث أ هي مصفوفة المعاملات ، س مصفوفة المجاهيل
ب مصفوفة الحدود المطلقة

(٢) س = $أ^{-1}$ ب ومن ذلك نوجد المجاهيل

رتبة المصفوفة: نفرض أن أ مصفوفة فإن رتبة أ والتي نرمز لها بالرمز ر(أ) تعرف بأنها درجة أكبر محدد قيمته ≠ الصفر يمكن الحصول عليه من عناصر المصفوفة أ

ملاحظات

(أ) إذا كان نظم أ هو م × ن حيث أ ليست صفرية فإن ر(أ) ≥ ل حيث ل أصغر العددين م أو ن

(ب) إذا كانت أ = [صفرية] ∴ ر(أ) = صفر وإلا فإن ر(أ) ≥ ١

(ج) إذا كانت أ = I ∴ ر(I) = ن حيث ن ∈ {١، ٢، ٣، ...}

(و) ر(أ) = ر(أ^م)

(د) إضافة أي صف أو عمود صفري لا يغير من رتبة المصفوفة

(هـ) إضافة أو حذف صف أو عمود هو عبارة عن تجميع لعدة صفوف أو أعمدة فإن ذلك لا يغير من رتبة المصفوفة

المعادلات الخطية في ن من المجاهيل: أ س = ب

إذا كانت ب مصفوفة صفرية تسمى متجانسة والا فهي غير متجانسة
حيث أ مصفوفة المعاملات ، س مصفوفة المجاهيل ، ب مصفوفة الثوابت

المصفوفة الموسعة $أ^* = (أ \mid ب)$

إمكانية الحل (أولاً) المتجانسة : أ س = [صفرية]

في هذه الحالة ر(أ) = ر($أ^*$) لذلك سوف نبحث إمكانية الحل من خلال إيجاد ر(أ)

بفرض أن عدد المجاهيل هو ن توجد لذلك حالتان

(١) ر(أ) = ن يوجد حل وحيد هو الحل الصفري (الحل التافه)

(ii) ر(م) < ن يوجد عدد لا نهائي من الحلول من بينها الحل الصفري

ثانياً **غير المتجانسة**

م س = ب حيث ب ≠ □

في هذه الحالة نحسب كل من ر(م) ، ر(م)* وعدد المجاهيل ن

ويوجد لذلك ثلاث حالات

الحالة الأولى: ر(م) = ر(م*) = ن يوجد حل وحيد

الحالة الثانية: ر(م) = ر(م*) < ن يوجد عدد لا نهائي من الحلول

ويسمى الحل الحل العام (الصورة العامة للحل)

الحالة الثالثة: ر(م) ≠ ر(م*) لا يوجد حل على الإطلاق

- احداثيات نقطة في الفراغ (ثلاثية الأبعاد)
وتكتب $أ(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، ب$(س_2 ، ص_2 ، ع_2)$

- احداثيات منتصف $\overline{أب}$ ولتكن جـ $\left(\frac{س_1+س_2}{2} ، \frac{ص_1+ص_2}{2} ، \frac{ع_1+ع_2}{2}\right)$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (س_2 - س_1 ، ص_2 - ص_1 ، ع_2 - ع_1)$

- متجه موضع $أ = \overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{و} = \overrightarrow{أ} = (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$

- معيار المتجه $\overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{س_1^2 + ص_1^2 + ع_1^2}$

- البعد بين نقطتين أ ، ب (طول $\overline{أب}$) $\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{(س_2-س_1)^2+(ص_2-ص_1)^2+(ع_2-ع_1)^2}$

- متجهات الوحدة الأساسية في الفراغ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$
$\overrightarrow{س} = (1 ، 0 ، 0)$ ، $\overrightarrow{ص} = (0 ، 1 ، 0)$ ، $\overrightarrow{ع} = (0 ، 0 ، 1)$

- متجه الوحدة هو متجه معياره الواحد الصحيح.
- متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ}$ ويكتب $\overrightarrow{ى}_{أ} = \overrightarrow{أ}^* = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

- تساوي متجهين في الفراغ $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ فإن
$(أ_س ، أ_ص ، أ_ع) = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع) \Leftarrow أ_س = ب_س ، أ_ص = ب_ص ، أ_ع = ب_ع$

حيث $أ_س ، أ_ص ، أ_ع$ هي مركبات $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه كل من محور س ، محور ص ، محور ع

- زوايا وجيوب تمام الاتجاه في الفراغ ($\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع$)

(جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$) جيوب تمام الاتجاه

$\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ حيث $أ_س = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_س$ ، $أ_ص = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ص$

، $أ_ع = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ع$

$\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع) = \|\overrightarrow{أ}\| \,(جتا\, \theta_س ، جتا\, \theta_ص ، جتا\, \theta_ع)$

حيث (جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$) هو متجه وحدة

أي أن جتا² $\theta_س$ + جتا² $\theta_ص$ + جتا² $\theta_ع$ = ١

• زوايا اتجاه المتجه :

زوايا اتجاه محور السينات أو أي مستقيم يوازيه هي (صفر ، ٩٠° ، ٩٠°)

" " " الصادات " " " (٩٠° ، صفر ، ٩٠°)

" " " ع " " " (٩٠° ، ٩٠° ، صفر)

• إذا كانت ($\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$) هي زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن

($\pi - \theta_س$ ، $\pi - \theta_ص$ ، $\pi - \theta_ع$) " " " " ($-\overrightarrow{أ}$)

• إذا كان المتجه يصنع مع محاور الإحداثيات زوايا متساوية في القياس

أي أن $\theta_س = \theta_ص = \theta_ع = \theta$ فإن :

جتا² $\theta_س$ + جتا² $\theta_ص$ + جتا² $\theta_ع$ = ١ ∴ ٣ جتا² θ = ١ ⟸ جتا² θ = $\frac{1}{3}$

∴ جتا θ = $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴ θ = ٥٤° ٤٤َ ٨ً أو ١٢٥° ١٥َ ٥٢ً

ملاحظات

① النقطة (ك ، ٠ ، ٠) تقع على محور السينات وبعدها عن المستوى ص ع = |ك|

② النقطة (٠ ، م ، ٠) تقع على محور الصادات وبعدها عن المستوى س ع = |م|

③ النقطة (٠ ، ٠ ، ل) " " " ع وبعدها عن المستوى س ص = |ل|

④ النقطة م (س ، ص ، ع) من الفراغ يكون

بعدها عن محور السينات = $\sqrt{ص^2 + ع^2}$

بعدها عن محور الصادات = $\sqrt{س^2 + ع^2}$

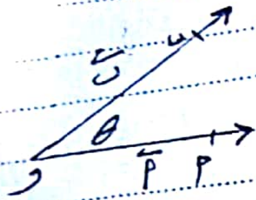
بعدها عن محور ع = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

⑤ معادلة المستوى س ص هي ع = ٠

معادلة المستوى ص ع هي س = ٠

معادلة المستوى س ع هي ص = ٠

الضرب القياسي لمتجهين



$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \|\vec{أ}\|\,\|\vec{ب}\| \text{ جتا } \theta$

حيث θ هي الزاوية الصغرى بين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

بشرط سحبهما داخليه أو خارجيه معًا إلى نقطة واحدة

ملاحظات:

① اذا كانت θ = صفر فإن $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \|\vec{أ}\|\,\|\vec{ب}\|$

أي أن $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ لهما نفس الاتجاه (متوازيان - متطابقان)

② اذا كانت $\theta = 180°$ فإن $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = -\|\vec{أ}\|\,\|\vec{ب}\|$

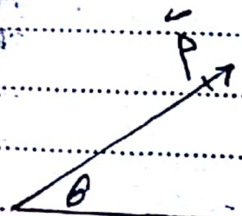
أي أن $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ في عكس الاتجاه

③ $\theta = 90$ فإن $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$ = صفر أي أن $\vec{أ} \perp \vec{ب}$

④ خواص عملية الضرب القياسي لمتجهين

- $\vec{أ} \cdot \vec{أ} = \|\vec{أ}\|^2$ • $(ك\,\vec{أ}) \cdot \vec{ب} = ك\,(\vec{أ} \cdot \vec{ب})$
- $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \vec{ب} \cdot \vec{أ}$
- $\vec{أ} \cdot (\vec{ب} + \vec{ج}) = \vec{أ} \cdot \vec{ب} + \vec{أ} \cdot \vec{ج}$
- $\vec{س} \cdot \vec{س} = \|\vec{س}\|^2 = 1$ ، $\vec{ص} \cdot \vec{ص} = 1$ ، $\vec{ع} \cdot \vec{ع} = 1$
- $\vec{س} \cdot \vec{ص}$ = صفر ، $\vec{س} \cdot \vec{ع}$ = صفر ، $\vec{ص} \cdot \vec{ع}$ = صفر (متعامدة)

الزاوية بين متجهين



$$\text{جتا } \theta = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\|\,\|\vec{ب}\|}$$

حيث $\theta \in [0, \pi]$

مسقط (مركبة) $\vec{أ}$ في اتجاه $\vec{ب}$ = $\dfrac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|} = \|\vec{أ}\| \text{ جتا } \theta$

المركبة الاتجاهية لـ $\vec{أ}$ في اتجاه $\vec{ب}$ هي $\dfrac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|} \cdot \vec{ى}_{ب}$

أي أن = $\dfrac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|} \cdot \dfrac{\vec{ب}}{\|\vec{ب}\|} = \dfrac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|^2} \cdot \vec{ب}$

تذكر: اذا كانت $\vec{أ} = (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، $\vec{ب} = (س_2 ، ص_2 ، ع_2)$ فإن $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = س_1 س_2 + ص_1 ص_2 + ع_1 ع_2$

الضرب الإتجاهي لمتجهين:



$\vec{A} \times \vec{B} = (\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \, \text{جا} \, \theta) \, \vec{ى}$

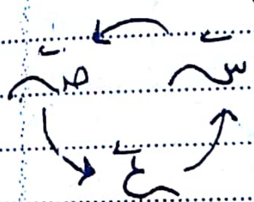
حيث $\vec{ى}$ متجه وحدة عمودي على كل من $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ويتحدد اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى

- $\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$
- اذا كانت θ = صفر ، ١٨٠ فإن $\vec{A} \times \vec{B}$ = صفر
- اذا كانت $\theta = 90$ فإن $\vec{A} \times \vec{B} = (\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\|) \, \vec{ى}$
- $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = |\,\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \, \text{جا} \, \theta\,|$
- متجه الوحدة العمودي على كل من $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ هو $\vec{ى} = \pm \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{\|\vec{A} \times \vec{B}\|}$
- المجموعة اليمينية من متجهات الوحدة الأساسية (متعامدة)

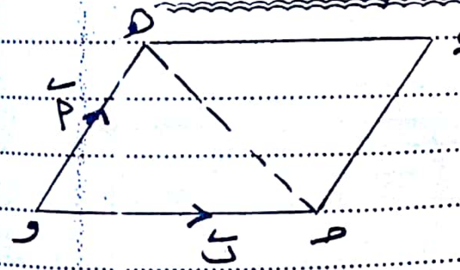
$\vec{س} \times \vec{ص} = \vec{ع}$

$\vec{ص} \times \vec{ع} = \vec{س}$

$\vec{ع} \times \vec{س} = \vec{ص}$



- ## المعنى الهندسي لمعيار حاصل الضرب الإتجاهي



$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \, \text{جا} \, \theta$

= مساحة ▱ و ب د هـ

= ٢ م △ و ب هـ

∴ م △ و ب هـ = $\frac{1}{2} \|\vec{A} \times \vec{B}\|$

اذا كان $\vec{A} = (A_س ، A_ص ، A_ع)$ ، $\vec{B} = (B_س ، B_ص ، B_ع)$ فإن

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \overset{\oplus}{\vec{س}} & \overset{\ominus}{\vec{ص}} & \overset{\oplus}{\vec{ع}} \\ A_س & A_ص & A_ع \\ B_س & B_ص & B_ع \end{vmatrix}$$

توازي متجهين:

اذا كان $\vec{A} \parallel \vec{B}$ فإن $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ صفر

حيث $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ، $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ فإن

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = k$$

أي أن $\vec{A} = k\,\vec{B}$

k موجب لهما نفس الاتجاه ، k سالب لهما عكس الاتجاه

حاصل الضرب الثلاثي القياسي:

اذا كان $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ، $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ ،
$\vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$ فإن الكمية القياسية

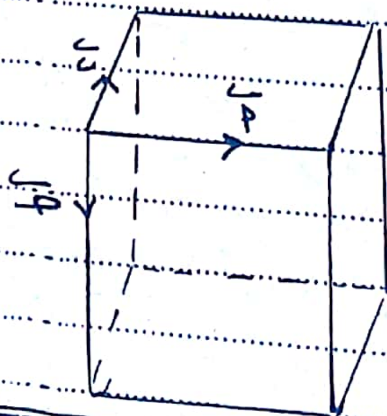
$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$ تعرف

باسم حاصل الضرب الثلاثي القياسي.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

نتيجة الاستنتاج: ترتيب كتابة المتجهات ع بترتيب دوري واحد

المعنى الهندسي لحاصل الضرب الثلاثي القياسي $|\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}|$ هو حجم متوازي السطوح الذي فيه المتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ تمثل ثلاثة احرف غير متوازية



اذا كان $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} =$ صفر

فإن المتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ تقع في مستوى واحد

الكرة

معادلة الكرة التي مركزها (ل، ك، ن) وطول نصف قطرها نق هي :-

(س − ل)^2 + (ص − ك)^2 + (ع − ن)^2 = نق^2

حالة خاصة إذا كان مركز الدائرة نقطة الأصل فإن معادلة الكرة تصبح

س^2 + ص^2 + ع^2 = نق^2

- الصورة العامة لمعادلة الكرة :

س^2 + ص^2 + ع^2 + ٢ل س + ٢ك ص + ٢ن ع + د = صفر

- حيث د = ل^2 + ك^2 + ن^2 − نق^2 ويكون نق^2 = ل^2 + ك^2 + ن^2 − د

ومركزها هو ($-\frac{1}{2}$ معامل س، $-\frac{1}{2}$ معامل ص، $-\frac{1}{2}$ معامل ع)

ملاحظات

- معامل س^2 = معامل ص^2 = معامل ع^2 = ١
- معادلة من الدرجة الثانية خالية من الحدود س ص، س ع، ع ص
- اذا كان مركز الكرة نقطة الأصل فإن د = صفر
- اذا كان مركز الكرة (ل، م، ن) وتمس مستوى س ص فإن نق = |ن| ، تمس مستوى س ع فإن نق = |م|
تمس مستوى ص ع فإن نق = |ل|

اذا كانت الكرة نصف قطرها نق وتمس مستويات الإحداثيات الموجبة فإن مركزها هو (نق، نق، نق)

- حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق^3
- مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^2

الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم في الفراغ :-

$\vec{ر} = \vec{أ} + ك \vec{هـ}$ حيث $\vec{أ}$ متجه موضع نقطة معلومة على المستقيم أ(س، ص، ع)

$\vec{هـ}$ متجه اتجاه للمستقيم $\vec{هـ} = (أ، ب، جـ)$ ، ك ∈ ح ،

$\vec{ر}$ متجه موضع أي نقطة عليه $\vec{ر} = (س، ص، ع)$

∴ $(س، ص، ع) = (س_١، ص_١، ع_١) + ك(أ، ب، جـ)$

المعادلات البارامترية لخط مستقيم : $س = س_١ + ك أ$ ، $ص = ص_١ + ك ب$ ، $ع = ع_١ + ك جـ$

الصورة الكارتيزية لخط مستقيم : $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$

ملاحظات

١) أ ، ب ، جـ ≠ صفر معاً

٢) اذا كانت أ = صفر تصبح المعادلة $س = س_١$ ، $\frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$

٣) اذا كانت ب = صفر " " $ص = ص_١$ ، $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$

٤) اذا كانت جـ = صفر " " $ع = ع_١$ ، $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب}$

٥) يمكن استبدال متجه الاتجاه (أ، ب، جـ) بجيوب تمام الاتجاه للمستقيم حيث (جتا هـ س ، جتا هـ ص ، جتا θ ع) = (ل، م، ن) وتصبح المعادلة :-

$\frac{س - س_١}{ل} = \frac{ص - ص_١}{م} = \frac{ع - ع_١}{ن}$

٦) المعادلة الاتجاهية لمستقيم يمر بنقطة الأصل هي $\vec{ر} = ك(أ، ب، جـ)$

٧) اذا كانت $\vec{هـ} = (أ، ب، ٠)$ فإن المستقيم يوازي المستوى س ص

$\vec{هـ} = (أ، ٠، جـ)$ " " " س ع

$\vec{هـ} = (٠، ب، جـ)$ " " " ص ع

الزاوية بين مستقيمين في الفراغ: إذا كانت $\vec{هـ}_1$ ، $\vec{هـ}_2$ متجهي اتجاه المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$

$$\therefore \text{جتا } \theta = \frac{|\vec{هـ}_1 \cdot \vec{هـ}_2|}{\|\vec{هـ}_1\| \, \|\vec{هـ}_2\|} \quad \text{حيث } \theta \in [0 ، \frac{\pi}{2}]$$

إذا كان $(ل_1 ، م_1 ، ن_1)$ ، $(ل_2 ، م_2 ، ن_2)$ هما جيوب تمام الاتجاه لمستقيمين "متجهي وحدة" فإن $\text{جتا } \theta = |ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2|$

• شرط توازي وتعامد المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ في الفراغ:

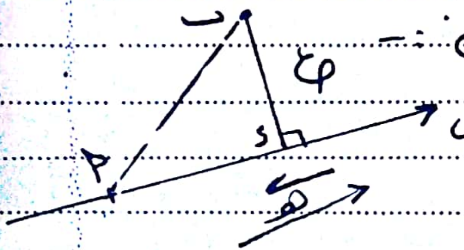
إذا كان $\vec{هـ}_1 = (أ_1 ، ب_1 ، جـ_1)$ ، $\vec{هـ}_2 = (أ_2 ، ب_2 ، جـ_2)$ هما متجهي اتجاه $ل_1$ ، $ل_2$ فإن

① $ل_1 \parallel ل_2$ إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$ أي أن $\vec{هـ}_1 = ك \vec{هـ}_2$ أي أن $\vec{هـ}_1 \times \vec{هـ}_2 = \vec{0}$

② $ل_1 \perp ل_2$ إذا كان $\vec{هـ}_1 \cdot \vec{هـ}_2 =$ صفر أي أن $أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + جـ_1 جـ_2 =$ صفر

ملاحظة: إذا كان $ل_1 \nparallel ل_2$ فإن $ل_1$ ، $ل_2$ إما متقاطعان أو متخالفان

المسافة بين نقطة ومستقيم في الفراغ:



• طول العمود المرسوم من نقطة $ب \notin$ مستقيم على المستقيم $ل = ع = ب د$

الطريقة الأولى: $ع = ب د = \frac{\|\vec{أب} \times \vec{هـ}\|}{\|\vec{هـ}\|}$ حيث $\vec{هـ}$ متجه اتجاه المستقيم $ل$ ، $أ \in$ للمستقيم $ل$.

الطريقة الثانية: $ع = ب د = \sqrt{(أب)^2 - (أد)^2}$ حيث

$أد$ هو مركبة (مسقط) $\vec{أب}$ في اتجاه $\vec{هـ}$ $\therefore أد = \frac{|\vec{أب} \cdot \vec{هـ}|}{\|\vec{هـ}\|}$

معادلات المستوى في الفراغ :-

المعادلة المتجهة $\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{أ}$ أو $\vec{ن} \cdot (\vec{ر} - \vec{أ}) = صفر$

حيث $\vec{ر} = (س ، ص ، ع)$ ، $\vec{أ}$ متجه موضع نقطة معلومة

$\vec{ن} = (أ ، ب ، ج)$ متجه اتجاه عمودي على المستوى

أي أن : $(أ ، ب ، ج) \cdot (س ، ص ، ع) = (أ ، ب ، ج) \cdot (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$

الصورة القياسية $أ(س - س_1) + ب(ص - ص_1) + ج(ع - ع_1) = صفر$

الصورة العامة : $أ س + ب ص + ج ع + د = صفر$ حيث

$د = -(أ س_1 + ب ص_1 + ج ع_1)$

• معادلة مستوى بمعلومية الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات في النقط أ$(س_1 ، ٠ ، ٠)$ ، ب$(٠ ، ص_1 ، ٠)$ ، ج$(٠ ، ٠ ، ع_1)$ فإن معادلته هي

$$\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = 1$$

• معادلة مستوى يمر بثلاث نقط أ$(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، ب$(س_2 ، ص_2 ، ع_2)$ ، ج$(س_3 ، ص_3 ، ع_3)$ هي

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = صفر$$

أو نوجد $\vec{أب}$ ، $\vec{أج}$ ويكون $\vec{ن} = \vec{أب} \times \vec{أج}$ ثم نعوض في المعادلة $\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{أ}$

• معادلة مستوى بمعلومية مستقيمين متقاطعين فيه $ل_1$ ، $ل_2$ ويحتوي النقطة أ

إذا كان $\vec{هـ_1}$ ، $\vec{هـ_2}$ فيكون $\vec{ن} = \vec{هـ_1} \times \vec{هـ_2}$

لأي نقطة معلومة تكون المعادلة $\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{أ}$

الزاوية بين مستويين: جتا θ = |ن۱ . ن۲| / ||ن۱|| ||ن۲||

حيث $\theta \in [0 ، \frac{\pi}{2}]$ ، ن۱ ، ن۲ هما متجها العمودي على المستويين

شرط توازي وتعامد مستويين:

إذا كانت ن۱ = (أ۱، ب۱، جـ۱) ، ن۲ = (أ۲، ب۲، جـ۲) متجها العمودي للمستويين فإن:

التوازي: ن۱ // ن۲

ن۱ = ك (ن۲)

أ۱ / أ۲ = ب۱ / ب۲ = جـ۱ / جـ۲ = ك

أو ن۱ × ن۲ = صفر

التعامد: ن۱ ⊥ ن۲

ن۱ . ن۲ = صفر

أي أن:

أ۱ أ۲ + ب۱ ب۲ + جـ۱ جـ۲ = صفر

طول العمود المرسوم من نقطة على مستوى:

(البعد بين نقطة ومستوى)

طول العمود المرسوم من النقطة (س۱، ص۱، ع۱) على المستوى الذي معادلته أ س + ب ص + جـ ع + د = 0 هو ع حيث

ع = |أ س۱ + ب ص۱ + جـ ع۱ + د| / $\sqrt{}$(أ² + ب² + جـ²)

إذا كانت ع = صفر ∴ (س۱، ص۱، ع۱) ∈ المستوى

• لإيجاد البعد بين مستويين متوازيين:

نوجد نقطة ∈ لأحدهما ثم نوجد طول العمود النازل من هذه النقطة على المستوى الآخر.